# APPROXIMATION OF SYSTEMS WITH DELAY AND THEIR APPLICATION

Igor Cherevko

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

14.05.2026

# Plan

**I. INTRODUCTION**

**II. APPROXIMATION SCHEMES**

**III. APPLICATION**

**IV. EXAMPLES**

# Introduction

Differential-difference and differential-functional equations are mathematical models of many applied problems in automatic regulation and control systems, chemical, biological, technical, economic and other processes whose evolution depends on the prehistory.

An important element in the study of many applied processes is the delay, which arises, for example, as a result of the finite speed of signal propagation from one element of the system to another. In particular, in the mathematical modeling of processes in semiconductor laser devices with optical feedback, the delay arises as a result of taking into account the signal propagation time from the laser to the mirror. Thus, in biological systems, evolution is associated with such long-term processes as reproduction, development, and extinction, which do not occur instantaneously, but with a certain delay. In engineering, many control systems include a physical delay that affects the internal dynamics of the control system. Therefore, the study of the influence of time delays on modern control systems is obviously an important research topic in the development and tuning of feedback control laws.

1. Corduneanu C., Li Y., Mahdavi M. Functional Differential Equations: Advances and Applications. New Jersey : John Wiley & Sons, 2016. 368 p.
2. Schiesser W.E. Time Delay ODE/PDE Models. Applications in Biomedical Science and Engineering. Boca Raton : CRC Press, 2019. 250 p.
3. Fathalla A. Rihan. Delay Differential Equations and Applications to Biology. Singapore : Springer Verlag, 2021. 303 p.
4. Gopalsamy K. Stability and Oscillation in Delay Differential Equations of Population Dynamics. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1992. Vol. 74. 501 p.
5. Forrest-Owen O. Mathematical Modelling and it's Applications in Biology, Ecology and Population Study. Master's Thesis. Chester, 2016. 124 p.
6. Domoshnitsky A., Rasin A., Padhi S. Functional Differential Equations and Applications: Fdea-2019, Ariel, Israel, September 22-27. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 379. 2022.

# Statement of the initial problem

We will consider the initial problem for a differential-difference equation of the delay type

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \tag{1}$$

$$\varphi(t) : E_{t_0} \to R^n, \tag{2}$$

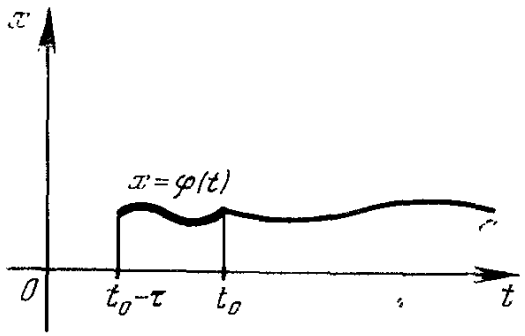
where $t \in R$, $x(t) \in R^n$, $\tau > 0$, $E_{t_0} = [t_0 - \tau, t_0]$.
By the solution of equation (1) with the initial function $\varphi(t)$ we will understand the function $x(t)$, which at satisfies equation (1) and coincides with the initial function $\varphi(t)$ on the set $E_{t_0}$

$$x(t) = \varphi(t), \ t \in E_{t_0}.$$

This solution at the point $t_0$, generally speaking, has only the right derivative. For the existence of a derivative of the solution of the initial problem (1)-(2) it is necessary and sufficient that the gluing condition is fulfilled:

$$\dot{\varphi}(t_0 - 0) = f(t_0, \varphi(t_0), \varphi(t_0 - \tau)). \tag{3}$$

If the function is continuous in the set of variables and satisfies the Lipschitz condition in the second and third arguments, then there is a unique solution to the problem (1)-(2).



# Approximation Schemes of Differential Equations with delay (start)

1. Salukvadze M. E. On the problem of synthesizing an optimal controller in linear systems with delay subject to constantly acting disturbances / M. E. Salukvadze // Automation and Telemechanics. - 1962. 23, No. 2. - P. 1595-1600.

2. Repin, Yu. M. Solution of the Problem of Analytical Design of a Controller on Simulating Devices / Yu. M. Repin, V. E. Tretyakov // Automation and Telemechanics. - 1963. - 24, No. 6. - Pp. 738-743.

3. Krasovsky N.N. Approximation of a problem of analytical design of controllers in the system with delay // J. AMM. - 1964. - V. 28, № 4. - P. 716-725.

4. Repin Y.M The approximate replacement of delay systems of ordinary differential equations // J. AMM. - 1965. - V. 29, № 2. - P. 226-245.

5. Halanay A. Approximations of delays by ordinary differential equations. Recent advances in differential equations / A. Halanay. - New York : Academic Press, 1981. - P. 155-197.

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bx(t-1) \tag{4}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $A, B$ – $n \times n$ constant matrixes.

$$\frac{dy_0}{dt} = Ay_0 + By_m,$$

$$\frac{dy_i}{dt} + my_i = my_{i-1}, \quad i = \overline{1, m},\ m \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

It is established that if $m \to \infty$ then the solutions of the initial problem (4) are approximated by the solutions of the Cauchy problem (5) on a finite interval $t \in [0, T]$.

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x(t), x(t-\tau)),$$
$$x(t) = \varphi(t),\ t \in E_{t_0}, \tag{6}$$

$$\frac{dz_0(t)}{dt} = X\left(t, z_0, z_m\right),$$
$$\frac{dz_i(t)}{dt} = \frac{m}{\tau}\left(z_{j-1}(t) - z_j(t)\right),\ j = \overline{1, m}, \tag{7}$$
$$z_i\left(t_0\right) = \varphi\left(t_0 - \frac{i\tau}{m}\right),\ i = \overline{0, m}.$$

If the solution of the initial problem (6) satisfies the Lipschitz condition on $[t_0 - \tau, T]$, then the solution of the Cauchy problem (7) approximates this solution

$$\left| x\left(t - \frac{j\tau}{m}\right) - z_j(t) \right| \leq \frac{K\tau}{\sqrt{m}},\ j = \overline{0, m},\ t \in \left[t_0, T\right],\ K > 0.$$

# Про схему наближення елемента запізнення

При дослідженні диференціальних рівнянь із запізненням

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), x(t-\tau)\right), \ \tau > 0 \tag{8}$$

у випадку досить малого $\tau$ розглядають його наближення звичайними диференціальними рівняннями.
Розглянемо наближення елемента запізнення

$$y(t) = x(t-\tau), \ t_0 \leq t \leq T$$

за допомогою аперіодичної ланки, що задається рівнянням

$$\tau \frac{dz(t)}{dt} + z(t) = x(t), \tag{9}$$

де стала $\tau$ також як і запізнення в рівнянні (8), а $x(t)$ вхідна функція елемента запізнення при $t \geq t_0$. Для встановлення відповідності між елементом запізнення $y(t)$ та аперіодичною ланкою $z$ у початковий момент покладемо

$$z(t_0) = y(t_0) = x(t_0 - \tau).$$

Оцінимо різницю

$$\varepsilon(t) = z(t) - y(t).$$

## Лема

*Нехай вхідна функція $x(t)$ елемента запізнення диференційовна на $[t_0 - \tau, T]$ або є неперервною функцією. Тоді між аперіодичною ланкою $z(t)$ та елементом запізнення $y(t)$ мають місце співвідношення*

$$|z(t) - y(t)| \leq \tau\omega(x', \tau), \tag{10}$$

*або*

$$|z(t) - y(t)| \leq 4\omega(x, \tau), \tag{11}$$

*де $\omega(x', \tau)$, $\omega(x, \tau)$ модулі неперервності функцій $x'(t)$, $x(t)$.*

Якщо запізнення $\tau$ не є малим, тоді для покращення апроксимації розглянемо $m \in N$ елементів запізнення, що послідовно між собою зв'язані та породжені деякою вхідною функцією $x(t)$

$$y_1(t) = x\left(t - \frac{\tau}{m}\right), \quad y_2(t) = y_1\left(t - \frac{\tau}{m}\right) = x\left(t - \frac{2\tau}{m}\right), ...,$$

$$y_m(t) = y_{m-1}\left(t - \frac{\tau}{m}\right) = x\left(t - \tau\right).$$

Будемо припускати, що вхідна функція $x(t)$ є неперервною на $[t_0 - \tau, T]$ і її початковий стан заданий $x(t) = \varphi(t)$, $t \in [t_0 - \tau, t_0]$.

Для відповідної послідовності аперіодичних ланок, що відповідають послідовності елементів запізнення, розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered}\frac{\tau}{m}z_1'(t)+z_1(t)=x(t),\\ \frac{\tau}{m}z_j'(t)+z_j(t)=z_{j-1}(t),\ j=\overline{2,m}, t\in[t_0,T]\end{gathered} \tag{12}$$

з початковими умовами

$$z_j(t_0)=y_j(t_0)=x\left(t_0-\frac{j\tau}{m}\right),\ j=\overline{1,m}, m\in N. \tag{13}$$

## Лема

*Нехай вхідна функція $x(t)$ у системі (12) є неперервною на $[t_0-\tau,T]$. Тоді для розв'язків задачі Коші (12)–(13) справджуються нерівності*

$$|z_j(t)-y_j(t)|\le\delta\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right),\ j=\overline{1,m},$$

*де $\delta(s)$ – монотонно зростаюча функція та*

$$\lim_{s\to 0}\delta(s)=0.$$

# Класична схема апроксимації

Розглянемо початкову задачу для диференціально-різницевого рівняння із запізненням

$$x'(t) = f\big(t, x(t), x(t-\tau)\big), \quad t \in [0, T], \tag{14}$$

$$x(t) = \varphi_0(t), \quad t \in [-\tau, 0], \tag{15}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $f(t, u, v)$ — неперервна функція, що задовольняє умову Ліпшиця за $u$ і $v$, $\varphi_0(t)$ – неперервна початкова функція.
Наведемо схему наближеної заміни початкової задачі (14)–(15), задачею Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь, яка була запропонована в роботах [3,5] і розвинена в роботах [6,7,8,9].
Введемо в розгляд $m+1$ функції такого вигляду

$$x\left(t - \frac{i\tau}{m}\right) = y_i(t), \quad i = 0, \ldots, m, \ m \in N. \tag{16}$$

Обмежуючись розкладом у ряд Тейлора

$$x\left(t - \frac{(i-1)\tau}{m}\right) = x(t - \frac{i\tau}{m} + \frac{\tau}{m}) = x(t - \frac{i\tau}{m}) + \frac{\tau}{m} x'(t - \frac{i\tau}{m}) + \ldots, \tag{17}$$

двома членами дістанемо рівність

$$y_{i-1}(t) = y_i(t) + \frac{\tau}{m} y_i'(t).$$

У результаті рівнянню з запізненням (14) поставимо у відповідність систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} y_0'(t) &= f\big(t, y_0(t), y_m(t)\big), \\ y_i'(t) &= \frac{m}{\tau}\big(y_{i-1}(t) - y_i(t)\big), \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{18}$$

Відповідні початкові умови для системи (18) можна задати у вигляді

$$y_i(0) = \varphi_0\left(-\frac{i\tau}{m}\right), \quad i = 0, \dots, m. \tag{19}$$

У припущенні, що розв'язок початкової задачі (14)–(15) задовольняє умову Ліпшиця на відрізку $[-\tau, T]$, встановлено [4], що розв'язок задачі Коші (18)–(19) апроксимує розв'язок початкової задачі і справджуються нерівності

$$\left| x\left(t - \frac{i\tau}{m}\right) - y_i(t) \right| \le \frac{K\tau}{\sqrt{m}}, \quad i = 0, \dots, m, \ t \in [0, T], \ K > 0. \tag{20}$$

Дослідження схем апроксимації диференціальних рівнянь із запізненням в просторі неперервних функцій на скінченному інтервалі здійснено в роботах [6,7,8]. У цьому випадку встановлено, що розв'язок задачі Коші (18)–(19) апроксимує розв'язок початкової задачі (14)–(15) і справджуються нерівності

$$\left| x\left(t - \frac{i\tau}{m}\right) - y_i(t) \right| \le \beta\big(\omega(x, \frac{\tau}{m})\big), \quad i = 0, \dots, m, \ t \in [0, T], \tag{21}$$

де функція $\beta(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, $\omega\big(x, \frac{\tau}{m}\big)$ — модуль неперервності розв'язку початкової задачі (14)–(15) на $[-\tau, T]$.

## Зауваження

*За теоремою Кантора–Гейне про рівномірну неперервність* $\omega(x, \frac{\tau}{m}) \to 0$ *при* $m \to \infty$. *Отже, при великих* $m$ *розв'язок задачі Коші* (18)–(19) *наближає розв'язок початкової задачі* (14)–(15).

## Зауваження

*Для початкової задачі з багатьма запізненнями*

$$x'(t) = f\big(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_p)\big), \quad t \in [0, T], \tag{22}$$

$$x(t) = \varphi_0(t), \quad t \in [-\tau, 0], \tag{23}$$

*де* $0 < \tau_1 < \cdots < \tau_p = \tau$, $p \geq 1$ *апроксимуюча задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь має вигляд [6]*

$$y_0'(t) = f\big(t, y_0(t), y_{\ell_1}(t), \ldots, y_{\ell_p}(t)\big), \quad \ell_i = \left[\frac{m\tau_i}{\tau}\right], \tag{24}$$

$$\begin{aligned} y_i'(t) &= \frac{m}{\tau}\big(y_{i-1}(t) - y_i(t)\big), \quad i = 1, \ldots, m, \ t \in [0, T], \\ y_i(0) &= \varphi_0\left(-\frac{i\tau}{m}\right), \quad i = 0, \ldots, m. \end{aligned} \tag{25}$$

## Зауваження

*Апроксимуюча система звичайних диференціальних рівнянь* (18) *при великих* $m$ *є сингулярно збуреною, її відносять до класу жорстких задач для яких потрібно використовувати спеціальні жорстко стійкі різницеві схеми.*

# Схема апроксимації підвищеної точності

Припустимо, що для початкової задачі (14)–(15) справедливі такі додаткові умови:

**A)** функція $f(t,u,v)$ задовільняє умову Ліпшиця:

$$|f(t_1,u_1,v_1)-f(t_2,u_2,v_2)| \le L_1\big(|t_1-t_2|+|u_1-u_2|+|v_1-v_2|\big), \quad L_1>0, t_1,t_2\in[0,T], \tag{26}$$

**B)** початкова функція $\varphi_0(t)$ диференційовна при $t\in[-\tau,0]$ похідна якої задовільняє умову Ліпшиця:

$$|\varphi_0(t_1)-\varphi_0(t_2)| \le L_0\,|t_1-t_2|, \quad L_0>0, t_1,t_2\in[-\tau,0], \tag{27}$$

**C)** має місце умова склейки

$$\varphi_0'(0)=f\big(0,\varphi_0(0),\varphi_0(-\tau)\big). \tag{28}$$

## Лема

*Нехай справджуються умови **A**–**C**. Тоді розв'язок $x(t)$ початкової задачі (14)–(15) неперервно диференційовний на $[\tau,T]$ і $x'(t)$ задовольняє умову Ліпшиця*

$$|x'(t_1)-x'(t_2)| \le L_2\,|t_1-t_2|, \quad L_2>0,\ t_1,t_2\in[-\tau,T]. \tag{29}$$

Апроксимація диференціального рівняння (14) системою звичайних диференціальних рівнянь (18) базується на використанні послідовності з'єднаних аперіодичних елементів (16), що здійснюють зсув на величину $\tau/m$ та обмежуючись в розкладі у ряд Тейлора двома членами.

Розглянемо розклад за формулою Тейлора:

$$y_{i-1}(t) = y_i(t) + \frac{\tau}{m} y_i'(t) + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{m}\right)^2 y_i''(t) + \dots$$

обмежуючись трьома членами розкладу [7,9].

Поставимо у відповідність початковій задачі (14)–(15) задачу Коші для системи звичайних диференційованих рівнянь:

$$\begin{aligned} y_0'(t) &= f(t, y_0, y_m), \\ y_{j-1}'(t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{m}\right)^2 y_i''(t) + \frac{\tau}{m} y_j'(t) + y_i(t), \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{30}$$

з початковими умовами

$$y_0(0) = \varphi_0(0), \quad y_j(0) = \varphi\left(-\frac{j\tau}{m}\right), \quad y_j'(0) = \varphi'\left(-\frac{j\tau}{m}\right), \quad j = 1, \dots, m. \tag{31}$$

## Теорема

*Якщо для початкової задачі* (14)–(15) *справджуються умови* $\boldsymbol{A}$–$\boldsymbol{C}$, *тоді її розв'язок* $x(t)$ *рівномірно наближається функцією* $y_0(t)$, *що визначається з апроксимуючої системи* (30)–(31), *на довільному скінченному інтервалі* $[0, T]$ *і справджується нерівність*

$$\max_{0 \le s \le t} |x(s) - y_0(s)| \le \frac{A}{m}\left(e^{2L_1 t} - 1\right). \tag{32}$$

## Зауваження

*Схему апроксимації* (30)–(31) *початкової задачі* (14)–(15) *називають схемою підвищеної точності.*

# Числове моделювання

Для моделювання початкових задач із запізненням за допомогою наведених алгоритмів розроблено прикладне програмне забезпечення на мові програмування TypeScript, з використанням Taiwind для побудови візуального каркасу та chart.js для побудови графіків [10].

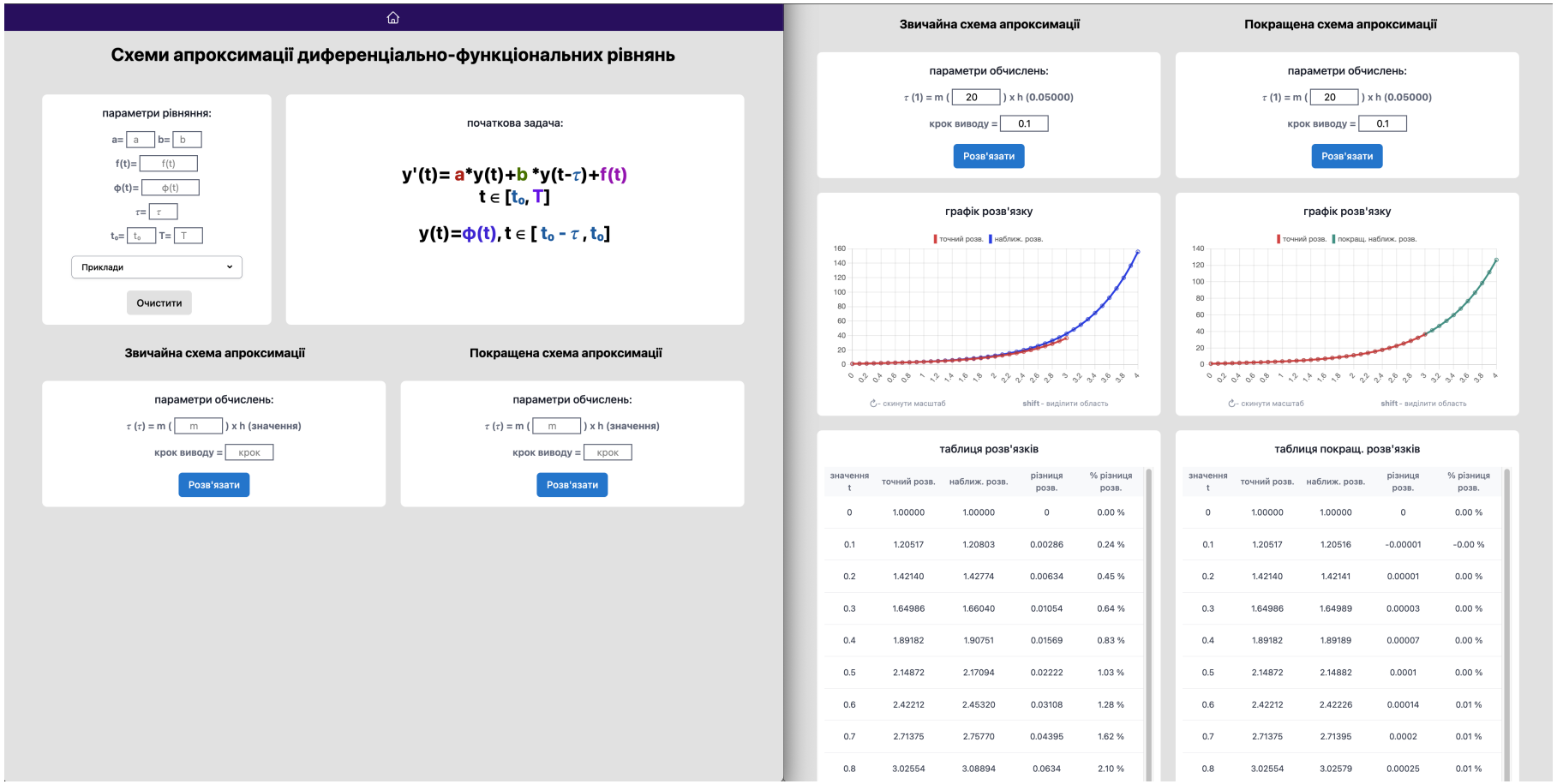



Рис. 1: Вигляд додатку після запуску (зліва) та в процесі взаємодії (справа)

Прикладне програмне забезпечення складається з двох частин:

- математичний пакет – набір програмно реалізованих алгоритмів для моделювання початкових задач із запізненнями,
- інтерактивний вебінтерфейс – вебсторінка, яка дозволяє якісно взаємодіяти із математичним пакетом, задавати необхідні вхідні параметри та отримувати результати роботи у вигляді графіків та таблиць.

Взаємодія із додатком відбувається за принципом зверху вниз. Спочатку необхідно задати вхідні параметри початкової задачі, або ж вибрати один із прикладів, що вже попередньо задані на етапі розробки. Для початку числового моделювання необхідно також задати потрібні параметри обчислень: розмірність $m$ та крок виводу результатів $h$. Натиснувши кнопку *Розв'язати* одержимо результати моделювання у вигляді таблиць та графіків.

**Приклад.** Розглянемо початкову задачу для диференціально-функціонального рівняння з відхиленим аргументом:

$$x'(t) = x(t) + x(t-1) - t, \tag{33}$$

$$x(t) = 1, \quad t \in [-1, 0]. \tag{34}$$

За допомогою методу кроків отримаємо $x_T(t)$ точний розв'язок початкової задачі (33)–(34) на відрізку $[0, 2]$:

$$x_T(t) = \begin{cases} e^t + t, & t \in [0, 1], \\ e^t + (t-1)e^{t-1} + 1, & t \in [1, 2]. \end{cases} \tag{35}$$

Результати числових експерементів для знаходження наближеного розв'язку $x_n(t)$, значення точного розв'язку $x_T(t)$ та абсолютні і відності похибки наведені в таблицях.

Табл. 1: Результати числових експерементів для класичної схеми апроксимації

| $t$ | $x_T(t)$ | $x_n(t)$ | $\Delta$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.00000 | 1.00000 | 0 | 0.00% |
| 0.5 | 2.14872 | 2.15927 | 0.01055 | 0.49% |
| 1 | 3.71828 | 3.78329 | 0.06501 | 1.75% |
| 1.5 | 6.30605 | 6.52536 | 0.21931 | 3.48% |
| 2 | 11.10734 | 11.62828 | 0.52094 | 4.69% |

Табл. 2: Результати числових експерементів для схеми апроксимації підвищеної точності

| $t$ | $x_T(t)$ | $x_n(t)$ | $\Delta$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.00000 | 1.00000 | 0 | 0.00% |
| 0.5 | 2.14872 | 2.14882 | 0.00010 | 0.00% |
| 1 | 3.71828 | 3.71869 | 0.00041 | 0.01% |
| 1.5 | 6.30605 | 6.30752 | 0.00147 | 0.02% |
| 2 | 11.10734 | 11.11148 | 0.00414 | 0.04% |

Аналіз числових експерементів що наведені в таблицях 1, 2 показує, що похибка схеми підвищеної точності значно краща ніж похибка класичної схеми, що підтверджує теоретичні результати точності апроксимації (20), (32).

# Література

6. Cherevko I. M., Piddubna L. A. On the approximate solutions of differential difference equation. Математичні студії. 1998. Vol. 9, No 2. C. 187-192.

7. Piddubna L. A., Cherevko I. M. Approximations of differential-difference equations and calculations of nonasymptotic roots of quasipolynomials. Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximations. 1999. Vol. 28, No 1. P. 15-21.

8. Матвій О. В., Черевко І. М. Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість. Нелінійні коливання. 2004. Т. 7, No 2. С. 208-216.

9. Черевко І.М. Апроксимація диференціально-різницевих рівнянь і наближення неасимптотичних коренів квазіполіномів. Нелінійні диференціальні рівняння та їх застосування. Київ: Ін-т математики НАН України, 1992. С. 74-84.

10. Краснокутський О.С., Черевко І.М. Схеми апроксимації диференціально-різницевих рівнянь та їх числове моделювання. Буковинський матем. журнал, 2026. Т.14, №1. С. 7–15.