РОЗВИТОК ТЕОРІЇ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ У ПРАЦЯХ АКАДЕМІКА М.О.ПЕРЕСТЮКА

(1 січня 1946 – 25 січня 2024)

DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2024/1.1

АКАДЕМІК М. О. ПЕРЕСТЮК (01.01.1946 – 25.01.2024) – ВИДАТНИЙ УЧЕНИЙ І ПЕДАГОГ

З ХРОНОЛОГІЇ ЖИТТЄВОГО ШЛЯХУ

- 1963 – закінчив середню школу з золотою медаллю
- 1963 – 1968 – студент механіко-математичного факультету КДУ ім. Т.Г. Шевченка
- 1968 – вступ до аспірантури
- 1969 – початок викладацької діяльності
- 1972 – захист кандидатської дисертації «Деякі питання дослідження нелінійних систем диференціальних рівнянь з миттєвими змінами».
- 1976 – обіймає посаду доцента
- 1986 – захист докторської дисертації на тему «Коливні розв'язки диференціальних рівнянь з імпульсною дією та їх стійкість».
- 1987 – монографія «Диференціальні рівняння з імпульсним впливом» (у співавторстві з А.М. Самойленком)

- 1987 – декан механіко-математичного факультету (до 2003 р.)
- 1988 – завідувач кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь (до 2021 р.)
- 1988 – присуджено вчене звання професора
- 1995 – монографія «Impulsive Differential Equations». – Singapore - New Jersey - London - Hong Kong: World Scientific Publishing, 1995 (у співавторстві з А.М. Самойленком)
- 1996 – Державна премія України в галузі науки і техніки за цикл праць «Нові математичні методи в нелінійному аналізі»
- 1997 – обрано членом-кореспондентом НАНУ
- 1998 – премія НАН України імені М.М. Крилова за цикл праць «Сучасні методи дослідження динамічних систем»

- 2002 – присвоєно почесне звання “Заслужений діяч науки і техніки України”,
- 2009 – обрано академіком НАНУ
- 2009 – нагороджено орденом «За заслуги»
- 2010 – заслужений професор Київського національного університету імені Тараса Шевченка
- 2012 – Державна премія України в галузі освіти
- 2017 – премія НАН України імені М.М. Боголюбова за цикл праць «Асимптотичні методи нелінійної механіки та статистичної фізики»
- 2019 –нагороджено орденом «За заслуги»

Доробок: 350 наукових та навчально-методичних праць, серед яких 7 монографій та понад 50 підручників і навчальних посібників. Серед учнів – 10 докторів та 25 кандидатів наук.

Передумови розроблення теорії імпульсних систем. Модель годинника з ударами

Математичний маятник з лінійним тертям:

$$\ddot{\varphi} + 2\varepsilon\dot{\varphi} + \sin\varphi = 0.$$

Лінеаризація: $\sin\varphi \sim \varphi$, $|\varphi| \ll 1$

$$\ddot{\varphi} + 2\varepsilon\dot{\varphi} + \varphi = 0$$

Задача Коші: $\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = x$. Перехід до еквівалентної задачі

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega, & \varphi(0) = 0; \\ \dot{\omega} = -\varphi - 2\varepsilon\omega, & \omega(0) = x > 0. \end{cases}$$

Розв'язок

$$\begin{cases} \varphi(t;x) = \mathrm{e}^{-\varepsilon t}\frac{x}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\sin\left(t\sqrt{1-\varepsilon^2}\right), \\ \omega(t;x) = \mathrm{e}^{-\varepsilon t}x\cos\left(t\sqrt{1-\varepsilon^2}\right) - \varepsilon\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\frac{x}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\sin\left(t\sqrt{1-\varepsilon^2}\right). \end{cases}$$

Перший після $t_0 = 0$ момент, коли $\varphi = 0$: $t_1 = \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$. Кутова швидкість в цей момент:

$$\omega\left(\frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}};x\right) = -x\exp\left(-\frac{\varepsilon\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right) := -\theta x.$$

Зменшення модуля початкової швидкості на півперіоді внаслідок дисипації енергії

$$\omega \mapsto f_0(\omega) := -\theta\omega.$$

“Удар“ $\Rightarrow$ імпульсне поповнення енергії $\Rightarrow$імпульс швидкості

$$\omega\left(\frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}+0;x\right)^2=\omega\left(\frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}};x\right)^2+h^2=\theta^2x^2+h^2;$$

$$\omega\mapsto f_-(\omega):=-\sqrt{\omega^2+h^2};$$

$$\omega\left(\frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}+0;x\right)=f_-\circ f_0(x)=-\sqrt{\theta^2x^2+h^2}.$$

Наступний момент, коли $\varphi=0$, та кутова швидкість в цей момент

$$\omega\left(\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}};x\right)=f_0\circ f_-\circ f_0(x)=\theta\sqrt{\theta^2x^2+h^2};$$

$$\omega\mapsto f_+(\omega)=\sqrt{\omega^2+h^2}.$$

Імпульсний приріст швидкості внаслідок „удару“

$$\omega\left(\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}+0;x\right)=f_+\circ f_0\circ f_-\circ f_0(x)=$$
$$=\sqrt{\theta^2\left(\theta^2x^2+h^2\right)+h^2}$$

Виникає відображення

$$\mathbb{R}_+\ni x\mapsto f(x)=\sqrt{\theta^4x^2+(1+\theta^2)h^2}\in\mathbb{R}_+.$$

Нерухома точка

$$f(x)=x\quad\Leftrightarrow\quad\sqrt{\theta^4x^2+(1+\theta^2)h^2}=x.$$

$$x_*=\frac{h\sqrt{1+\theta^2}}{\sqrt{1-\theta^4}}.$$

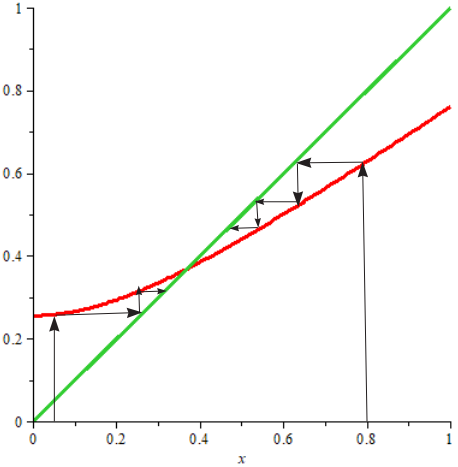

Рис. 0.1. Існування та стійкість розривного циклу. Діаграма Ламері

Нерухомій точці відповідає розривний цикл

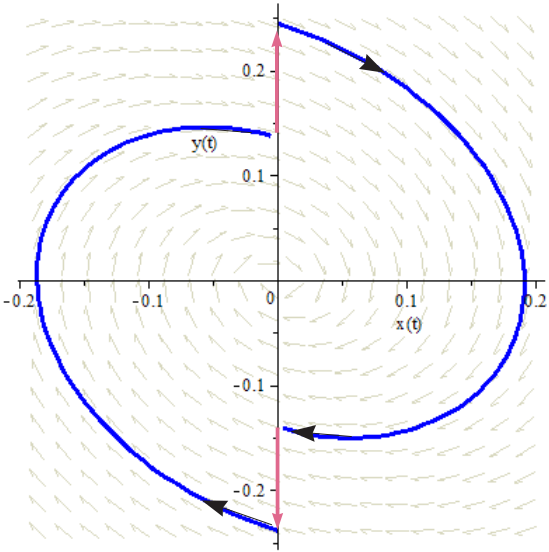

Рис. 0.2. Розривний цикл

Дослідження нелінійних коливань маятника малої амплітуди:

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \mathcal{O}(\varphi^5)$$

Масштабне перетворення $\varphi \to \sqrt{\varepsilon}\varphi$:

$$\ddot{\varphi} + \varphi = \varepsilon\left[\frac{\varphi^3}{3!} + 2\dot{\varphi}\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) =: \varepsilon f(\varphi, \dot{\varphi}, \varepsilon) \tag{1}$$

Дослідження коливань маятника в потенціальній ямі: перехід до рівняння стандартного за Боголюбовим вигляду шляхом уведення координат „дія–кут“ $(a, \theta \bmod 2\pi)$, де a відповідає за „енергетичний номер“ замкненої фазової кривої, θ – кутова змінна.

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon A(a, \theta, \varepsilon), \\ \dot{\theta} = \nu(a) + \varepsilon B(a, \theta, \varepsilon), \end{cases} \qquad \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\theta} = \varepsilon\frac{A(a, \theta, \varepsilon)}{\nu(a)} + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right). \tag{2}$$

Потреба розроблення асимптотичних методів дослідження коливань систем вигляду (1), (2), які підлягають імпульсній дії.

Опис системи з імпульсним впливом (спрощений варіант)

1) Система ЗДР

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{3}$$

де $f(\cdot,\cdot) \in \mathrm{C}\left(\mathbb{R} \times \mathcal{G} \mapsto \mathbb{R}^n\right)$ така, що (3) задовольняє умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші:

$$\forall\,(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{G}\ \exists \chi\,(\cdot; t_0, x_0) : [t_0, \infty) \mapsto \mathcal{G},\ \chi\,(t_0; t_0, x_0) = x_0;$$

2) замкнена множина імпульсного впливу $\mathcal{S} \subset \mathbb{R} \times \mathcal{G}$ та відображення імпульсного впливу

$$F(\cdot,\cdot) : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{G}.$$

[Додаткове припущення: кожна точка множини $\mathcal{S}$ є точкою строгого виходу з цієї множини відносно системи (3).]

Для заданих початкових значень (t_0, x_0) визначаємо розв'язок:

$$x(t) := \chi(t; t_0, x_0) \quad \forall t \in [t_0, t_1),$$
$$t_1 := \sup\left\{\tau > t_0 : (t, x(t)) \notin \mathcal{S} \quad \forall t \in (t_0, \tau)\right\},$$
$$t_1 < \infty : \quad x\left(t_1\right) = x_1^+ := F\left(t_1, \chi\left(t_1; t_0, x_0\right)\right).$$

Індуктивно, якщо $i > 0$, $t_i < \infty$, то покладаємо

$$x(t) := \chi\left(t; t_i, x_i^+\right) \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}),$$
$$t_{i+1} := \sup\left\{\tau > t_i : (t, x(t)) \notin \mathcal{S} \quad \forall t \in (t_i, \tau)\right\},$$
$$t_{i+1} < \infty : \quad x\left(t_{i+1}\right) := x_{i+1}^+ := F\left(t_{i+1}, \chi\left(t_{i+1}; t_i, x_i^+\right)\right).$$

Стандартний запис:

$$\dot{x} = f\left(t, x\right), \quad (t, x) \notin \mathcal{S};$$

$$\Delta x\Big|_{(t,x)\in\mathcal{S}} = F\left(t, x\right) - x =: I(t, x).$$

Асимптотичні методи для імпульсних систем нелінійної механіки

Система з фіксованими моментами імпульсів

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \epsilon f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right), \qquad t \neq \tau_i,$$

$$\Delta \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=\tau_i} = \epsilon I_i\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{7.1}$$

Система з нефіксованими моментами імпульсів

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \epsilon f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right), \qquad x \neq x_0,$$

$$\Delta \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=x_0} = \epsilon I\left(\frac{dx}{dt}\right), \tag{7.2}$$

Заміна змінних $(x, \dot{x}) \to (a, \varphi)$

$$x = a\sin\varphi, \qquad \frac{dx}{dt} = a\omega\cos\varphi, \qquad \varphi = \omega t + \theta. \tag{7.3}$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{\epsilon}{\omega} f(\nu t, a\sin\varphi, a\omega\cos\varphi)\cos\varphi,$$

$$t \neq \tau_i,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega - \frac{\epsilon}{a\omega} f(\nu t, a\sin\varphi, a\omega\cos\varphi)\sin\varphi,$$

$$\Delta a|_{t=\tau_i} = \frac{\epsilon}{\omega} I_i(a\sin\varphi, a\omega\cos\varphi)\cos\varphi + \epsilon^2 \ldots,$$

$$\Delta\varphi|_{t=\tau_i} = -\frac{\epsilon}{a\omega} I_i(a\sin\varphi, a\omega\cos\varphi)\sin\varphi + \epsilon^2 \ldots,$$

Перетворення першого наближення

$$a = b + \frac{\epsilon}{\omega} u^{(1)}(b, \theta, t), \qquad \varphi = \theta - \frac{\epsilon}{\omega b} u^{(2)}(b, \theta, t),$$

$$\begin{aligned} \frac{db}{dt} &= \frac{\epsilon}{\omega}\left[f_0^{(1)}(b) + \frac{\nu}{2\pi}\sum_{i=1}^{P} \bar{I}_i^{(1)}(b)\right] + \epsilon^2 \ldots \\ & t \neq \tau_i \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega - \frac{\epsilon}{\omega b}\left[f_0^{(2)}(b) + \frac{\nu}{2\pi}\sum_{i=1}^{P} \bar{I}_i^{(2)}(b)\right] + \epsilon^2 \ldots \\ & \Delta b|_{t=\tau_i} = \epsilon^2 \ldots, \qquad \Delta\theta|_{t=\tau_i} = \epsilon^2 \ldots. \end{aligned}$$

Метод усереднення

Система стандартного за Боголюбовим вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \epsilon X(t,x), \quad t \neq \tau_j(x) \\ \Delta x|_{t=\tau_j(x)} &= \epsilon I_j(x), \end{aligned}$$

$$X_0(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X(\tau, x) d\tau,$$

$$I^0(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t<\tau_i(x)<t+T} I_i(x),$$

Усереднена система без імпульсів

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon[X_0(x) + I^0(x)] \equiv \epsilon F(x) \qquad (7.136)$$

Обґрунтування методу усереднення

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \epsilon X(t,x), \qquad t \neq \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= \epsilon I_i(x). \end{aligned} \tag{7.133}$$

a) $X(t,x)$, $I_i(x)$ are functions, continuous with respect to their arguments and having the second order continuous derivatives with respect to x in the region

$$t \in \mathbf{R}, \qquad x = \mathrm{col}(x_1, \ldots, x_n) \in D \subset \mathbf{R}^n; \tag{7.134}$$

b) the times τ_i, at which the impulsive effect occurs, are indexed by integers such that $\tau_i \to -\infty$ if $i \to -\infty$ and $\tau_i \to +\infty$ if $i \to +\infty$, and there are such numbers L and d that, on any time interval of length L, there are at most d points of the sequence $\{\tau_i\}$;

c) the following finite limits

$$\begin{aligned} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X(\tau, x) d\tau &= X_0(x), \\ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t<\tau_i<t+T} I_i(x) &= I^0(x) \end{aligned} \tag{7.135}$$

exist and are uniform with respect to $t \in \mathbf{R}$ and $x \in D$.

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon[X_0(x) + I^0(x)] \equiv \epsilon F(x) \tag{7.136}$$

Theorem 115 *Let impulsive differential system (7.133) satisfy conditions a) – c). Suppose that the corresponding averaged system (7.136) has an equilibrium $x = x_0$ and the real part of all the roots of the characteristic equation* $\det|\lambda E - F'_x(x_0)| = 0$ *are nonzero at the equilibrium point.*

Then there exist such positive constants ϵ', σ_1, $D(\epsilon)$, $D(\epsilon) \leq \sigma_1 < \rho_1$, $D(\epsilon) \to 0$ if $\epsilon \to 0$, that, for any positive ϵ, $0 < \epsilon < \epsilon'$, the following statements hold:

1) *System (7.133) has a unique solution $x = x^*(t)$ defined for all $t \in \mathbf{R}$ and satisfying the inequality $\|x^*(t) - x^0\| < \sigma$;*

2) *If system (7.133) is periodic (almost periodic) with respect to t, then the solution $x^*(t)$ is also periodic (almost periodic);*

3) *Let $x(t)$ be any solution of (7.133), which satisfies, for some $t = t_0$, the inequality $\|x(t_0) - x^0\| < \sigma$. If the real parts of all the roots of the characteristic equation* $\det|\lambda E - F'_x(x_0)| = 0$ *are negative, then*

$$\|x(t) - x^*(t)\| \leq ce^{-\gamma\epsilon(t-t_0)}, \qquad t \geq t_0, \tag{7.137}$$

Samoilenko, A.M. , Perestyuk, N.A. The method of averaging in systems with an impulsive action Ukrainian Mathematical Journal, 1974, 26(3), pp. 342–347

Samoĭlenko, A. M.; Perestjuk, N. A. N. N. Bogoljubov's second theorem for systems of differential equations with impulse action.Differencialnye Uravnenija10(1974), 2001–2009, 2083.

Mitropol'skii, Yu.A. , Samoilenko, A.M. , Perestyuk, N.A. The problem of justifying the averaging method for second-order equations with impulsive action Ukrainian Mathematical Journal, 1977, 29(6), pp. 554–563

Karkīnbaēv, Ī.; Perestjuk, M. O. Application of the Krylov-Bogoljubov asymptotic method to the study of systems with impulse action.Vīsnik Kiïv. Unīv. Ser. Mat. Mekh.(1978), no.20, 51–59, 164.

Стійкість імпульсних систем

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + g(t,x), \qquad t \neq \tau_i(x),$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i(x)} = B_i x + \bar{I}_i(x), \tag{3.69}$$

$$|\tau_i(x') - \tau(x'')| \leq N\|x' - x''\| \tag{3.67}$$

$$\tau_i(x) \geq \tau_i((E + B_i)x + \bar{I}_i(x)) \tag{3.74}$$

$$\|g(t,x)\| \leq a\|x\|, \qquad \|\bar{I}_i(x)\| \leq a\|x\|. \tag{3.81}$$

Theorem 44 *Let the largest eigenvalue of the matrix* $\tilde{A}(t) = \frac{1}{2}(A(t) + A^T(t))$ *satisfy the inequality* $\Lambda(t) \leq \gamma$ *for all* $t \geq t_0$, *and let the largest eigenvalues of the matrix* $(E + B_i^T)(E + B_i)$ *be such that* $\Lambda_i^2 \leq \alpha^2$ *for all* $i = 1, 2, \ldots,$ *and the limit*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{i_x(t, t+T)}{T} = p \tag{3.85}$$

exist and be uniform with respect to $t \geq t_0$ *and* x, $\|x\| \leq h$, *where* $i_x(t, t+T)$ *is the number of points of* $\tau_i(x)$ *in the interval* $[t, t+T]$. *Suppose also that for all* $t \geq t_0$, x, $\|x\| < h$, *and all* $i = 1, 2, \ldots,$ *inequalities (3.67), (3.74), and (3.81) hold.*

If $\gamma + p \ln \alpha < 0$ *and the constant* a *in inequalities (3.81) is sufficiently small, then the zero solution of equations (3.69) is asymptotically stable.*

Метод функцій Ляпунова

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad t \neq \tau_i(x), \qquad \Delta x|_{t=\tau_i(x)} = I_i(x),$$
$$f(t,0) = 0, \qquad I_i(0) = 0, \qquad \tau_i(x) < \tau_{i+1}(x) \tag{3.91}$$

$$Z = \{(t;\, x) | t \geq t_0,\, \|x\| \leq h < h_0\},$$

Theorem 48 *Suppose there exists a positive definite function $V(t,x)$, which in the region Z satisfies the inequalities*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \langle grad_x V(t,x)\, f(t,x)\rangle \leq -\varphi(V(t,x)), \tag{3.94}$$
$$V(\tau_i(x),\, x + I_i(x)) \leq \psi(V(\tau_i(x),\, x)), \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{3.95}$$

where $\varphi(s)$, $\psi(s)$ are functions continuous for $s \geq 0$, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, and $\varphi(s) > 0$, $\psi(s) > 0$ for $s > 0$, and let

$$\sup_i (\min_{\|x\| \leq h} \tau_{i+1}(x) - \max_{\|x\| \leq h} \tau_i(x)) = \theta > 0. \tag{3.96}$$

Then, if the functions $\varphi(s)$ and $\psi(s)$ are such that

$$\int_a^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \theta \tag{3.97}$$

for some $a_0 > 0$ and all $a \in]0, a_0]$, then the zero solution of system (3.91) is stable. If, instead of inequality (3.97), we have

$$\int_a^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \theta - \gamma, \tag{3.98}$$

for some $\gamma > 0$, then the zero solution of system (3.91) will be asymptotically stable.

Питання асимптотичної стійкості тривіального інваріантного тора лінійного розширення

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x, \quad t \neq \tau_j, \qquad (1)$$
$$\Delta x\big|_{t=\tau_j} = B(\varphi)x,$$

де $a(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(\mathfrak{I}_m)$; $P(\varphi),\ B(\varphi) \in C(\mathfrak{I}_m)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$; $x = (x_1, \ldots, x_n)$;

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + f(\varphi, x), \quad t \neq \tau_j, \qquad (2)$$
$$\Delta x\big|_{t=\tau_j} = B(\varphi)x + I(\varphi, x),$$

де $f(\varphi, x),\ I(\varphi, x) \in C(\mathfrak{I}_m)$,

$$\|f(\varphi, x)\| \leq a\|x\|, \qquad \|I(\varphi, x)\| \leq a\|x\| \qquad (3)$$

при всіх $\varphi \in \mathfrak{I}_m$, $\|x\| \leq h$, $h > 0$, $a > 0$.

Відносно послідовності $\{\tau_j\}$ вважається, що рівномірно відносно $t \geq t_0$ існує скінченна границя

$$\lim_{T\to\infty} \frac{i(t, t+T)}{T} = p, \tag{4}$$

де $i(t, t+T)$ — кількість точок послідовності $\{\tau_j\}$, що належать проміжку $[t, t+T]$. Нехай Ω_φ — ω-гранична множина додатної півтраєкторії розв'язку $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi \in \Im_m$, $t \in [0, +\infty)$, першого рівняння системи (1), $\Omega = \bigcup_{\varphi\in\Im_m} \Omega_\varphi$.

Теорема 1 [11]. *Нехай у системі* (1) *послідовність* $\{\tau_j\}$ *задовольняє умову* (4).

Тоді якщо виконується нерівність

$$\gamma + p\ln\alpha < 0, \tag{5}$$

де $\gamma = \max\limits_{\substack{j=1,\dots,n\\ \varphi\in\Omega}} \mathrm{Re}\left(\lambda_j(P(\varphi))\right)$, $\alpha^2 = \max\limits_{\substack{j=1,\dots,n\\ \varphi\in\Omega}} \lambda_j\left((E + B(\varphi))^T (E + B(\varphi))\right)$, *то при достатньо малих значеннях* $\varepsilon > 0$ *тривіальний інваріантний тор* $x = 0$, $\varphi \in \Im_m$ *системи* (1) *є асимптотично стійким.*

Теорема 2 [11, 12]. *Нехай у системі* (2) *послідовність* $\{\tau_j\}$ *задовольняє умову* (4).

Тоді якщо виконується нерівність (5) *і функції* $f(\varphi, x)$, $I(\varphi, x)$ *задовольняють умову* (3) *з достатньо малим значенням* a, *то при достатньо малих значеннях* $\varepsilon > 0$ *тривіальний інваріантний тор* $x = 0$, $\varphi \in \Im_m$ *системи* (2) *є експоненціально стійким.*

Samoĭlenko, A. M.; Perestjuk, N. A. Stability of the solutions of differential equations with impulsive action.Differencial'nye Uravnenija13(1977), no.11, 1981–1992, 2108.

Samoĭlenko, A. M.; Perestyuk, N. A. On the stability of solutions of systems with impulse action.Differentsialnye Uravneniya17(1981), no.11, 1995–2001, 2110.

Perestyuk, N.A. , Chernikova, O.S. A contribution to the stability problem for solutions of systems of differential equations with impulses Ukrainian Mathematical Journal, 1984, 36(2), pp. 171–176

Akhmetov, M.U. , Perestyuk, N.A. Stability of periodic solutions of differential equations with impulse action on surfaces Ukrainian Mathematical Journal, 1989, 41(12), pp. 1368–1372

Dudzyanyi, S.I. , Perestyuk, N.A. On the stability of a trivial invariant torus of one class of impulsive systems Ukrainian Mathematical Journal, 1998, 50(3), pp. 387–399.

Perestyuk, M.O. , Chernikova, O.S. On stability of integral sets of impulsive differential systems Ukrainian Mathematical Journal, 2002, 54(2), pp. 306–315

Perestyuk, M.O. , Chernikova, O.S. Some modern aspects of the theory of impulsive differential equations Ukrainian Mathematical Journal, 2008, 60(1), pp. 91–107

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x), \qquad t \neq \tau_i, \qquad \Delta x|_{t=\tau_i} = B_i x + I_i(x), \tag{4.20}$$

$$B_{i+p} = B_i, \qquad I_{i+p}(x) = I_i(x), \qquad \tau_{i+p} = \tau_i + T \tag{4.21}$$

Theorem 58 *Let in system (4.20) the functions $f(t,x)$ and $I_i(x)$, besides the assumptions made, also satisfy the Lipschitz condition in x,*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| + \|I_i(x) - I_i(y)\| \leq N\|x - y\|, \tag{4.25}$$

which is uniform with respect to $0 \leq t \leq T$ and $i = 1, 2, \ldots, p$.

Suppose that the linear homogeneous T-periodic system

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \qquad t \neq \tau_i, \qquad \Delta x|_{t=\tau_i} = B_i x \tag{4.26}$$

does not have nontrivial T-periodic solutions. If the Lipschitz constant N is so small that

$$KN < 1, \tag{4.27}$$

then system (4.20) has a unique T-periodic solution.

$$\max_{t,\tau\in[0,T]} \|G(t,\tau)\| = \frac{K}{T+p}.$$

Theorem 59 *Let in system (4.20) the functions $f(t,x)$ and $I_i(x)$ be continuous for $\|x\| \le h$, $0 \le t \le T$, and satisfy the condition*

$$K\|f(t,x)\| \le h, \quad K\|I_i(x)\| \le h, \quad 0 \le t \le T,$$
$$i = 1, 2, \ldots, p, \quad \|x\| \le h. \tag{4.38}$$

If the homogeneous system (4.26) does not have nontrivial T-periodic solutions, then system (4.20) has at least one T-periodic solution.

Розроблено теорію майже періодичних послідовностей та майже періодичних розв'язків імпульсних систем з майже періодичною залежністю правих частин від часу та майже періодичною послідовністю моментів імпульсної дії.

Samoĭlenko, A. M.; Perestjuk, N. A. Periodic solutions of weakly nonlinear systems with impulse action.Differencial'nye Uravnenija14(1978), no.6, 1034–1045, 1149.

Samoilenko, A.M. , Perestyuk, N.A. Periodic and almost-periodic solutions of impulsive differential equations Ukrainian Mathematical Journal, 1982, 34(1), pp. 55–61

Akhmetov, M.U. , Perestyuk, N.A. Almost-periodic solutions of one class of systems with impulses Ukrainian Mathematical Journal, 1984, 36(4), pp. 397–401

Akhmetov, M.U. , Perestyuk, N.A. Almost-periodic solutions of nonlinear impulse systems Ukrainian Mathematical Journal, 1989, 41(3), pp. 259–263

Akhmetov, M.U. , Perestyuk, N.A. Periodic solutions of quasi-linear impulse systems in the critical case Ukrainian Mathematical Journal, 1991, 43(4), pp. 273–279

Samoilenko, A.M. , Perestyuk, N.A. , Trofimchuk, S.I. Generalized solutions of impulse systems and the phenomenon of pulsations Ukrainian Mathematical Journal, 1991, 43(5), pp. 610–615

Akhmetov, M.U. , Perestyuk, N.A. Periodic and almost periodic solutions of strongly nonlinear impulsive systems. Prikladnaya Matematika i Mekhanika, 1992, 56(6), pp. 926–934

Akhmetov, M. U.; Perestyuk, N. A. Periodic and almost periodic solutions of strongly nonlinear impulse systems.Prikl. Mat. Mekh.56(1992), no.6, 926–934; translation in J. Appl. Math. Mech.56(1992), no.6, 829–837.

Perestyuk, N.A. , Slyusarchuk, V.E. Periodic solutions of nonlinear differential equations with pulse influence in a banach space Ukrainian Mathematical Journal, 1995, 47(3), pp. 430–442

Теорія інтегральних множин імпульсних систем

Нелінійне розширення імпульсної динамічної системи на торі

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi, x), \quad \varphi \notin \Gamma,$$

$$\Delta x|_{\varphi\in\Gamma} = B(\varphi)x + g(\varphi, x).$$

Тут множина Γ є гіперповерхнею на торі і визначається рівнянням $\Phi(\varphi) = 0$.

Позначимо через $\{\varphi_t(\varphi)\}$ потік на торі, породжений першим рівнянням системи.

Нехай $\{t_i(\varphi)\}$ – послідовність, утворена розв'язками рівняння відносно t

$$\Phi(\varphi_t(\varphi)) = 0.$$

Припущення:

$$t_{i+1}(\varphi) - t_i(\varphi) \geq \theta > 0$$

Для системи

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x$$

$$\Delta x|_{\varphi \in \Gamma} = B(\varphi)x$$

існує функція Гріна-Самойленка, яка задовольняє оцінку

$$\|G(t, \tau, \varphi)\| \leq Ke^{-\gamma|t-\tau|}$$

$$\left\| f(\varphi, x') - f(\varphi, x'') \right\| + \left\| g(\varphi, x') - g(\varphi, x'') \right\| \leq N \left\| x' - x'' \right|$$

Теорема 5. *Якщо функція Гріна – Самойленка $G(t,\tau,\varphi)$ задовольняє нерівність (10), а для розв'язків $t_i(\varphi)$ рівняння (2) виконується нерівність (11), то для достатньо малої сталої Ліпшиця N система (28) має інваріантну тороїдальну множину*

$$x = u(\varphi), \quad u(\varphi + 2\pi) = u(\varphi).$$

Samoilenko, A.M. , Perestyuk, N.A. Invariant sets of systems with instantaneous changes in standard form. Ukrainian Mathematical Journal, 1973, 25(1), pp. 111–115

Perestyuk, N.A. Invariant sets of a class of discontinuous dynamical systems. Ukrainian Mathematical Journal, 1984, 36(1), pp. 58–62

Akhmetov, M. U.; Perestyuk, N. A. Differential properties of solutions and integral surfaces of nonlinear impulse systems. Differentsial'nye Uravneniya28(1992), no.4, 555–566, 731; translation in Differential Equations28(1992), no.4, 445–453.

Perestyuk, M.O. , Feketa, P.V. Invariant manifolds of one class of systems of impulsive differential equations. Nonlinear Oscillations, 2010, 13(2), pp. 260–273

ДЯКУЮ за УВАГУ!