КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ОСОБЛИВОСТІ ПІДГОТОВКИ ТА ПРОВЕДЕННЯ НАВЧАЛЬНИХ ЗАНЯТЬ У ЗАКЛАДАХ ВИЩОЇ ОСВІТИ

для студентів механіко-математичного факультету

Собчук В.В., Харитонов О.М., Курилко О.Б.

Київ – 2025

Собчук В.В., Харитонов О.М., Курилко О.Б. «Особливості підготовки та проведення навчальних занять у закладах вищої освіти». Навчально-методичний посібник для студентів механіко-математичного факультету, 2025. – 105 с.

Рецензенти:

Станжицький О.М. доктор фізико-математичних наук, професор

Працьовитий М.В. доктор фізико-математичних наук, професор, академік АН ВШ України

Рекомендовано до друку
Вченою радою механіко-математичного факультету
протокол № 11 від «10» квітня 2025

У навчально-методичному посібнику «Особливості підготовки та проведення навчальних занять у закладах вищої освіти» розглянуто основні види навчальних занять, які проводяться для студентів у закладах вищої освіти, наведено рекомендації до підготовки та проведення занять. Посібник адресований здобувачам другого (магістерського) рівня вищої освіти механіко-математичного факультету, які вивчають дисципліни «Методика викладання математики та статистики у закладах вищої освіти», «Вища математика та методика її викладання у закладах вищої освіти» та проходять асистентську практику.

Посібник містить теоретичні та методичні відомості, необхідні для ефективної підготовки та проведення різних видів навчальних занять у закладах вищої освіти та низку завдань для самостійної підготовки.

© Собчук В.В., Харитонов О.М., Курилко О.Б.

ЗМІСТ

1. Теоретичні основи підготовки та проведення навчальних занять в закладах вищої освіти 4

1.1. Поняття навчального заняття та його дидактичні цілі 4

1.2. Основні документи, якими визначається організація освітнього процесу в закладах вищої освіти 8

1.3. Характеристика вимог робочих програм як основа формування змісту заняття у закладах вищої освіти 12

1.4. Види навчальних занять у закладах вищої освіти 17

1.5. Структура та етапи навчального заняття 23

1.6. Форми організації навчальної діяльності студентів 29

2. Методика організації навчальних занять у закладах вищої освіти . 36

2.1. Методика підготовки та проведення лекцій 36

2.2. Методика організації та проведення практичних, лабораторних і семінарських занять з вищої математики 49

3. Нормативно правове регулювання закладів вищої освіти..... 56

3.1. Основні нормативні документи України, що регулюють систему вищої освіти 56

3.2. Державні стандарти вищої освіти 59

Список рекомендованої літератури 64

Додаток А 67

Додаток В 91

Додаток С 104

1. Теоретичні основи підготовки та проведення навчальних занять в закладах вищої освіти

Організація навчальних занять у закладах вищої є ключовою складовою якісної освіти в наш час. Вона забезпечує не лише ефективне засвоєння знань та навичок, але й сприяє розвитку особистості студента, його підготовці до самостійного життя та успішної кар'єри.

Правильно організований освітній процес у закладах вищої освіти вчить студентів ефективно планувати свій час, самостійно працювати з інформацією, аналізувати та критично оцінювати матеріали, а також чітко та лаконічно висловлювати свої думки. У студентському ком'юніті при цьому створюється атмосфера взаємодопомоги та поваги, де студенти відчувають себе комфортно, не бояться помилок та активно беруть участь у навчальному процесі і суспільному житті. Навіть більше – це сприяє формуванню навичок самостійно здобувати знання, критично оцінювати інформацію та адаптуватися до нових умов, що є ключовими навичками для успішного життя в сучасному світі.

1.1. Поняття навчального заняття та його дидактичні цілі

Навчальне заняття – це основна форма організації навчального процесу у закладах вищої освіти, спрямована на досягнення чітко окреслених дидактичних цілей.

Метою вивчення дисциплін «Методика викладання математики та статистики у закладах вищої освіти», «Вища математика та методика її викладання у закладах вищої освіти» є, з однієї сторони, систематизувати знання отримані на першому (бакалаврському) рівні освіти на механіко-математичному факультеті, з іншого – переосмислити відомий здобувачам матеріал вже як майбутнім викладачам курсів вищої математики, які вони потенційно будуть читати для студентів інших спеціальностей (природничих, інженерних, економічних тощо) з урахуванням вимог відповідних стандартів освіти та часу виділеного на вивчення відповідного математичного апарату. Відтак в подальшому оцінювати викладений матеріал необхідно саме в такому смисловому контексті. Тобто навіть коли явно не зазначено, що йдеться про

матеріал заняття з вищої математики чи її певного розділу, оцінку усього викладеного нижче матеріалу варто робити через призму саме заняття з вищої математики.

Завданнями дидактики у закладах вищої освіти є наукове обґрунтовування змісту освіти, дослідження і пояснення закономірностей процесу навчання і умов його оптимальної організації, розробка і впровадження в педагогічну практику досконалих сучасних моделей навчального процесу, новітніх технологій, методики та методів навчання.

Дидактика, як наука, аналізує залежності, що обумовлюють хід і результати процесу навчання, визначає методи, організаційні форми і засоби, що забезпечують результативність запланованих освітніх цілей і завдань. Загалом дидактика охоплює систему навчання усіх предметів та на всіх рівнях навчальної діяльності. В нашому випадку ми концентруватимемось на вивченні саме вищої математики. Відтак, під дидактикою розумітимемо розділ педагогіки вищої школи, який вивчає закономірності і принципи навчання вищої математики, досліджує проблеми змісту, методів, форм і технологій професійної підготовки майбутніх фахівців в умовах закладів вищої освіти.

Категоріальний апарат дидактики закладів вищої освіти наступний:

- *викладання* – діяльність викладача закладу вищої освіти, яка полягає в постановці перед студентською аудиторією пізнавальних завдань, повідомленні нових знань, організації навчально-пізнавальної діяльності студентів та керівництво нею, перевірці якості набутих ними знань, умінь і навичок;
- *учіння* – цілеспрямований процес засвоєння студентами знань, оволодіння уміннями і навичками, у широкому розумінні – оволодіння соціальними досвідом у його узагальненому вигляді;
- *навчання* – цілеспрямований процес взаємодії викладача зі студентською аудиторією з метою засвоєння студентами знань, умінь, навичок і способів пізнавальної діяльності людини. *Навчання є двостороннім процесом, що поєднує у собі учіння і викладання*;

- *освіта* – процес і результат удосконалення здібностей і поведінки особистості, при якому вона досягає соціальної зрілості – це поєднання фундаментальної підготовки, розвитку критичного мислення, формування професійних навичок та особистісного зростання.

Найважливішими завдання дидактики вищої школи є розкриття педагогічних закономірностей, що діють у межах навчання та освіти, їх використання для побудови процесу навчання з метою оволодіння майбутніми фахівцями – студентами закладів вищої освіти – сучасними науковими знаннями; розроблення теорії вищої освіти; конструювання освітніх технологій; удосконалення змісту підготовки фахівців різноманітних профілів.

Реалізація цих завдань здійснюється насамперед через систему організації освітнього процесу в закладах вищої освіти в основі яких лежать навчальні заняття.

Кожне заняття з вищої математики має переслідувати загальні навчальні цілі заняття з вищої математики, як то:

- *засвоєння теоретичного матеріалу* – здобувачі повинні глибоко розуміти основні поняття, теореми, твердження та, за необхідності, їх доведення, які вивчались на занятті;
- *розвиток логічного мислення.* Вища математика є найкращим дидактичним інструментом формування та розвитку вмінь будувати логічні ланцюжки, доводити твердження, аналізувати математичні структури, будувати математичні моделі тощо;
- *формування навичок розв'язання задач* – здобувачі повинні вміти застосовувати теоретичні знання для розв'язання різноманітних математичних задач, в т.ч. прикладного призначення із галузі їх професійного спрямування;
- *розвиток абстрактного мислення.* Математика оперує величезним масивом абстрактних понять, відтак важливо розвивати у здобувачів здатність узагальнювати, абстрагуватися та працювати з абстрактними об'єктами;
- *виховання математичної культури* – у здобувачів має сформуватися уявлення про математику як науку, розуміти її місце в системі знань та

значення для інших наук. Ба більше, вища математика має сприяти формуванню глибокого розуміння математичних концепцій, їхньої ролі в науці та суспільстві, а також розвивати навички самостійного мислення, творчості та критичного аналізу.

Водночас важливим аспектом кожного заняття є реалізація дидактичних цілей: навчальних, виховних, розвиваючих.

навчальні цілі	• ознайомлення студентів з новими знаннями, поняттями, теоріями вищої математики; • формування умінь та навичок застосування знань на практиці; • розвиток пізнавальної активності та самостійності студентів;
виховні цілі	• виховання світоглядних переконань, моральних якостей, естетичних почуттів; • формування активної життєвої позиції, прагнення до самовдосконалення; • розвиток культури спілкування, співпраці, командної роботи;
розвиваючі цілі	• розвиток інтелектуальних здібностей студентів: пам'яті, мислення, уяви; • формування творчого потенціалу; • розвиток навичок самоаналізу, самооцінки, здатності навчатися протягом життя.

Дидактичні цілі навчального заняття з вищої математики повинні бути чіткими, конкретними та вимірюваними. Їх формулювання має відповідати таким вимогам:

- *зрозумілість*: цілі повинні бути зрозумілими як для викладача, так і для студентів;
- *досяжність*: цілі мають бути реальними та досяжними протягом одного заняття;

- *вимірюваність*: цілі повинні мати чіткі критерії оцінювання результатів досягнення.

Цілі навчального заняття повинні відповідати вимогам державних стандартів освіти у відповідних галузях знань, за якими здобувають фах студенти, а також вимогам конкретної освітньої програми та змісту освітнього компонента.

1.2. Основні документи, якими визначається організація освітнього процесу в закладах вищої освіти

Організація освітнього процесу в закладах вищої освіти здійснюється на основі нормативно-правових документів державного, міністерського та університетського рівнів, таких як Закон України "Про вищу освіту" та інші закони України, Укази Президента України, акти Кабінету Міністрів України, освітні та професійні стандарти, нормативні документи університету, що регулюють організацію освітнього процесу, визначають систему забезпечення якості освітнього процесу, процедури дотримання академічної доброчесності під час провадження освітнього процесу, інших нормативно-правових актів у сфері вищої освіти, а також рекомендацій і стандартів, визначених документами Болонського й Копенгагенського процесів, що визнані Україною.

Здобуття вищої освіти здійснюється за певною освітньою (освітньо-професійною чи освітньо-науковою) програмою, на яку, на основі конкурсного відбору зараховується здобувач перед початком навчання. *Освітні програми* (ОП) вищої освіти розробляються на основі вимог стандарту вищої освіти відповідної спеціальності та професійних стандартів, що визначають вимоги, необхідні для отримання професійних кваліфікацій.

Інформація щодо організації освітнього процесу за кожною ОП міститься в описі освітньої програми і в навчальному плані підготовки здобувачів вищої освіти за ОП.

Опис освітньої програми

Опис ОП включає профіль програми (інформація щодо спеціальності, спеціалізації (за наявності), ступеня вищої освіти, обсягу ОП, типу ОП,

акредитації, передумов для вступу, форм навчання, мета ОП, опис предметної області, придатність до працевлаштування, можливості подальшого навчання). Ця загальна інформація, включена в профіль ОП, конкретизується шляхом визначення *програмних компетентностей* (ПК), які має здобути випускник цієї ОП і *програмних результатів навчання* (ПРН), які забезпечують опанування програмних компетентностей. Стандартами освіти визначений необхідний для даної спеціальності перелік ПК, а в деяких випадках і перелік ПРН. Дані переліки формуються на основі вимог, визначених Національною рамкою кваліфікацій в описі відповідного кваліфікаційного рівня. Дані вимоги стосуються знань, умінь, комунікації, відповідальності і автономності. Визначені стандартами переліки доповнюються в ОП власними ПК і ПРН. При цьому на забезпечення ПК, визначених стандартом освіти, має бути відведено не менше 50% обсягу ОП.

З метою забезпечення ПК і ПРН, визначених в ОП, розробляється перелік компонент ОП та їх логічна послідовність. Компонентами ОП є навчальні дисципліни, курсові проєкти, практики, кваліфікаційні роботи. При побудові переліку компонентів ОП їх поділяють на ***обов'язкові і вибіркові***. Кожен обов'язковий компонент включається до ОП з метою забезпечення певних ПК і ПРН. Отже, в ОП не може існувати обов'язковий компонент, який не забезпечує жодну ПК, або жоден ПРН і, так само, не може існувати ПК або ПРН, який не забезпечений жодним обов'язковим компонентом ОП.

Табл. 1.

Матриці відповідностей програмних компетентностей та програмних результатів навчання компонентам освітньої програми

Матриця відповідності програмних компетентностей компонентам освітньої програми					Матриця відповідності програмних результатів навчання компонентам освітньої програми				
	ОК.01	ОК.02	ОК.03	ОК.04		ОК.01	ОК.02	ОК.03	ОК.04
ПК 1	+		+		ПРН 1	+			+
ПК 2				+	ПРН 2				+
ПК 3				+	ПРН 3			+	+
ПК 4	+	+			ПРН 4	+	+		

Обов’язкові компоненти ОП вивчаються у послідовності, визначеній структурно-логічною схемою ОП, таким чином, щоб вивчення попередніх компонентів забезпечувало знання і вміння, необхідні як передумови для вивчення наступних компонентів ОП. Для чіткого визначення зазначеної системи забезпечення ПК і ПРН освітніми компонентами до опису ОП включаються дві матриці відповідності, приклади яких наведені у табл. 1.

Вибіркова складова передбачена з метою забезпечення права здобувача на самостійну побудову індивідуальної освітньої траєкторії, що дає можливості поглибити професійні знання у межах обраної ОП та/або здобути додаткові спеціальні професійні компетентності, що забезпечуються компонентами інших ОП. Кредитний обсяг вибіркової складової має становити не менше 25 % від обсягу ОП. У межах вибіркової складової здобувач може обирати як окремі компоненти, так і їх спеціалізовані блоки. Вибіркові блоки розробляються таким чином, щоб забезпечити здобуття спеціальних ПК, які в сукупності забезпечують виконання вимог відповідного професійного стандарту для присвоєння певної професійної кваліфікації.

Навчальний план – це документ, який регламентує графік освітнього процесу, для кожного освітнього компоненту визначає загальний обсяг навчального часу і його розподіл між різними формами навчальних занять і самостійною роботою, а також – встановлює форми контролю.

Графік освітнього процесу встановлює тижневий обсяг осінніх і весняних семестрів, а також встановлює форму організації освітнього процесу (теоретичне навчання, практики, екзаменаційні сесії, підготовка кваліфікаційної роботи, канікули) для кожного тижня впродовж навчання. Відповідно до Положення про організацію освітнього процесу в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, сукупна тривалість теоретичного навчання, екзаменаційних сесій і практик за навчальний рік (крім випускних курсів) не може бути меншою 40 і більшою 44 тижнів; тривалість канікул не менше 8 тижнів (у т.ч. 3 тижні під час зимових канікул) але не більше 12 тижнів; для проведення кожної форми підсумкової атестації виділяється 1 тиждень; на написання кваліфікаційної роботи виділяється 4 тижні для бакалавра і 8 тижнів для магістра. При цьому

кількість навчальних занять на тиждень не може перевищувати 30 годин для освітнього рівня «бакалавр», 24 години – для освітнього рівня «магістр» і 12 годин – для освітнього рівня «доктор філософії». Таке обмеження важливе, якщо в семестрі запланована велика за обсягом практична підготовка.

Відповідно до опису освітньої програми, в структурі навчального плану виділяють обов'язкову і вибіркову складову. Обов'язкова складова, насамперед, планується виходячи з необхідності досягнення тих визначених в ОП ПРН, які забезпечують опанування компетентностей, встановлених стандартом відповідної спеціальності, і дають, таким чином, можливість присвоєння відповідної освітньої кваліфікації. На досягнення таких ПРН має бути відведено не менше 50% від обсягу всього навчального плану. Решта обов'язкової частини визначається, виходячи з необхідності інших, додаткових по відношенню до стандарту, ПРН. При цьому обсяг обов'язкової частини не може перевищувати 75% обсягу навчального плану.

Вибіркова складова передбачена для надання можливості здобувачеві самостійно формувати свою освітню траєкторію, шляхом вибору освітніх компонент, що складають сукупно щонайменше 25% обсягу ОП. Здобувач може обирати: із вибіркової складової навчального плану ОП, на якій він навчається); ▪ із вибіркової складової навчального плану іншої ОП того самого освітнього рівня; із блоку обов'язкових дисциплін іншої ОП того самого освітнього рівня; із вибіркової складової навчального плану іншої ОП іншого освітнього рівня; із навчальних дисциплін в іншому закладі вищої освіти за реалізації права на академічну мобільність.

При плануванні навчальних занять в навчальному плані береться до уваги здатність здобувача навчатися самостійно. Обсяг навчального часу планується для рівня «бакалавр» від 34% до 50%, а для рівня «магістр» від 27% до 34% від загального обсягу часу, відведеного на вивчення навчальної дисципліни. При цьому відсоток навчального часу зменшується від молодших курсів до старших. Наприклад, в навчальному плані бакалавра на першому курсі встановлюється 50%, а на четвертому 34% годин, відведених для навчальних занять. Навчальний план для заочної форми навчання з точки зору переліку, послідовності вивчення,

і кредитного обсягу освітніх компонентів є абсолютно аналогічним навчальному плану денної форми навчання тієї самої ОП. Відмінність полягає в зменшенні обсягу навчальних занять. Обсяг начальних занять для заочної форми не може перевищувати 20% від обсягу, встановленого для денної форми.

При плануванні організації освітнього процесу беруться до уваги і обмеження щодо кількості форм семестрового контролю: загальна кількість форм контролю не більше 8 за семестр, при цьому кількість іспитів не менша 3, і не більша 5.

1.3. Характеристика вимог робочих програм як основа формування змісту заняття у закладах вищої освіти

Робоча програма з освітнього компонента – вищої математики, чи окремого її розділу є фундаментальним документом, який визначає цілі, завдання, зміст, методи навчання та оцінювання навчальної дисципліни. Вона слугує своєрідним провідником і для викладача і для студентів, орієнтуючи та скеровуючи їх у процесі вивчення відповідної дисципліни.

Робоча програма дисципліни складається на основі опису освітньої програми, до складу якої відноситься дана дисципліна, і відповідного навчального плану.

Робоча програма будь-якого освітнього компонента має певну структуру.

1. *Пояснювальна записка*. Насамперед визначаються мета і завдання освітнього компонента, його місце в системі підготовки фахівців, попередні вимоги до опанування дисципліни, що мають знати та вміти здобувачі перед вивченням дисципліни. Дається коротка анотація змісту дисципліни та загальна інформація щодо кількості кредитів, які відводиться навчальним планом на опанування матеріалом з конкретизацією кількості відведених лекційних, практичних (семінарських чи лабораторних) годин, консультацій, самостійної роботи та форм проміжного та/або фінального контролю. Зазначається семестри, в які згідно з навчальним планом вивчається освітній компонент.

2. *Завдання (навчальні цілі) освітнього компонента*. Ставляться цілком визначені навчальні цілі – що має розуміти, знати, уміти використовувати на практиці здобувач в результаті вивчення освітнього компонента. Навчальні цілі в робочій програмі виражаються шляхом зазначення програмних компетентностей, які повинен здобути студент в разі успішного завершення навчання за даною дисципліною. Програмні компетентності, які забезпечує дисципліна, визначаються в описі освітньої програми.
3. *Результати навчання за дисципліною*. Навички, які студент може здобути при вивченні даної дисципліни визначаються в термінах результатів навчання за дисципліною. Результати навчання поділяються на чотири групи, які відповідають групам дескрипторів Національної рамки кваліфікацій: знання, вміння, комунікація, автономність та відповідальність. В рамках кожної групи в робочій програмі прописується конкретний результат, який здобувається в процесі навчання, зазначаються форми викладання і навчання, направлені на його досягнення, методи контролю та виражені в балах мінімальний та максимальний рівні оцінювання. Таким чином, в робочій програмі визначається чітка нерозривна залежність конкретних результатів вивчення освітнього компоненту з формами, методами і освітніми технологіями, методами оцінювання, які будуть застосовуватись в процесі вивчення дисципліни. Результати навчання мають бути максимально конкретизованими до рівня означень основних понять, властивостей, ознак, які вивчатимуться на заняттях з дисципліни.
4. *Співвідношення результатів навчання дисципліни із програмними результатами навчання***.** Місце кожного освітнього компонентна в загальній структурі освітньої програми визначається шляхом визначення тих програмних результатів навчання (встановлених в ОП), які забезпечує даний освітній компонент. При цьому робоча програма конкретизує яким чином і в якій частині програмні результати навчання забезпечуються даним освітнім компонентом. З цією метою в робочу програму включається таблиця відповідності програмних результатів навчання результатам навчання за освітнім компонентом. Приймаючи до уваги, що кожен ПРН

може забезпечуватися кількома освітніми компонентами, на основі зазначених таблиць можна структурувати забезпечення кожного ПРН в термінах результатів навчання окремих ОК і так усвідомити роль і місце кожного ОК в завданні забезпечення конкретного ПРН. Така структура необхідна не лише для систематизації освітнього процесу, але й для уніфікації здобутих знань, а саме – надання можливостей для перезарахування результатів навчання, отриманих в іншому ЗВО при переведенні, організації програм академічної мобільності, тощо.

5. *Організація оцінювання та підхід до формування оцінок в ході поточного та підсумкового контролю.* Необхідно чітко виписати порядок оцінювання відповідно до діючої системи ЄКТС. Саме завдяки ЄКТС студенти можуть отримати якісну освіту, будувати міжнародну кар'єру та реалізовувати свої амбіції. Здобувачам необхідно донести, що активна робота на лекціях передбачає успішне проходження опитувань, що проводяться на лекціях, відповіді на запитання лектора в ході пояснення матеріалу. Самостійна робота передбачає самостійне опрацювання літератури на предмет теоретичного матеріалу, знайомство з інформаційними платформами, які використовуються для проектування та планування освітнього процесу та платформ, які використовуються для організації дистанційного та комбінованого підходу для забезпечення освітнього процесу. Оцінювання успішності навчання здійснюється за 100 бальною шкалою. Можливості набору зазначених 100 балів розподіляються між різними формами контролю, що поділяються на семестрові і підсумкові форми контролю. Для кожної форми встановлюється мінімальний і максимальний бали, які можна отримати при оцінюванні. Бали, нижчі за мінімальний, обнуляються, тобто ніяк не враховуються в загальній оцінці. Наприклад, встановлений максимум за іспит складає 40 балів, а мінімум – 24 бали (60% від мінімуму). Якщо оцінка на іспиті є нижчою 24 балів, то бали за іспит не додаються до семестрової оцінки (вважаються рівними нулю), а підсумкова оцінка із дисципліни є незадовільною. З умови можливостей досягнення задовільної підсумкової оцінки за дисципліну (60 балів) визначається критично-

розрахунковий мінімум балів за навчання впродовж семестру для дисциплін, які завершуються іспитом – **20** балів. У випадку відсутності студента з поважних причин відпрацювання та перездачі форм контролю здійснюються у відповідності до „Положення про організацію освітнього процесу в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка" (2022), https://knu.ua/pdfs/official/Polozhennia-pro-organizatsiyu-osvitniogo-procesu-11_04_2022-with-changes.pdf.

6. *Структура навчальної дисципліни, тематичний план лекцій і практичних занять.* Розподіл навчального матеріалу за семестрами та/або модулями – це логічно пов'язані блоки навчального матеріалу, якими визначається порядок вивчення тем, розділів та модулів. Розподіл навчального матеріалу за семестрами або модулями дозволяє раціонально організувати навчальний процес і забезпечити поступове засвоєння студентами матеріалу освітнього компонента. Чітко визначена структура дисципліни забезпечує логічний перехід від однієї теми до іншої, дозволяє ефективно використовувати навчальний час, сприяє кращому засвоєнню матеріалу.
7. *Тематичний план* деталізує структуру дисципліни, вказуючи конкретні теми, які будуть розглядатися на лекціях і практичних заняттях, визначає обсяг самостійної роботи для кожної теми, створює основу для розробки завдань для контрольних заходів. Він також визначає розподіл годин за різними видами занять. Власне тематичний план є своєрідною дорожньою картою для викладача та студента, оскільки відображає логіку подачі інформації та допомагає спланувати навчальний процес.
8. *Самостійна робота студентів* є невід'ємною частиною навчального процесу, яка передбачає активну діяльність студента поза аудиторією. Вона спрямована на закріплення теоретичного матеріалу, розвиток самоосвіти та розкриття творчого потенціалу здобувачів. Ефективна організація самостійної роботи дозволяє студентам досягти високих результатів у навчанні та підготуватися до майбутньої професійної діяльності на сучасних висококонкурентних ринках праці. Самостійна робота дозволяє студентам глибше зануритися в матеріал і краще його зрозуміти. Студенти можуть самі

планувати свій час і вибирати найбільш зручний для нього темп роботи, навчаються брати відповідальність за своє навчання.

9. *Список рекомендованої літератури* – це не просто перелік книг та статей. Це інструмент, який допомагає студентам глибше зануритися в тематику освітнього компонента, розширити світогляд та знайти додаткові джерела інформації. Матеріали повинні безпосередньо стосуватися теми дослідження, бути доступними для студентів (у бібліотеці, онлайн, або у відкритому доступі). Матеріали мають відповідати рівню підготовки студентів та водночас бути сучасними й відображати останні досягнення науки.

Робоча програма кожного освітнього компонента розробляється кваліфікованими викладачами у відповідності до освітньо-професійної програми підготовки бакалаврів (освітньо-наукової програми підготовки магістрів), погоджується з гарантом відповідної програми, затверджується на засіданні кафедри та схвалюється науково-методичною комісією факультету. На основі робочої програми готується *силабус освітнього компонента* – документ, який містить всю необхідну інформацію про конкретну навчальну дисципліну. Він слугує своєрідною «дорожньою картою» як для викладача, так і для студента, визначаючи мету курсу, його зміст, методи навчання, систему оцінювання та інші важливі аспекти. Власне силабус забезпечує прозорість навчального процесу, дозволяючи студентам і викладачам чітко розуміти очікування один від одного, організувати свою навчальну діяльність, планувати час і ефективно готуватися до занять, контролювати хід навчального процесу та забезпечувати досягнення поставлених цілей.

Коли робоча програма та силабус освітнього компонента готові, викладач має чітке уявлення про загальні цілі курсу, його зміст та очікувані результати навчання. Наступним кроком є розробка детальної структури кожного заняття, яка забезпечить ефективне досягнення поставлених цілей.

1.4. Види навчальних занять у закладах вищої освіти

Основними видами навчальних занять з вищої математики у закладах вищої освіти наведено на рис. 1.

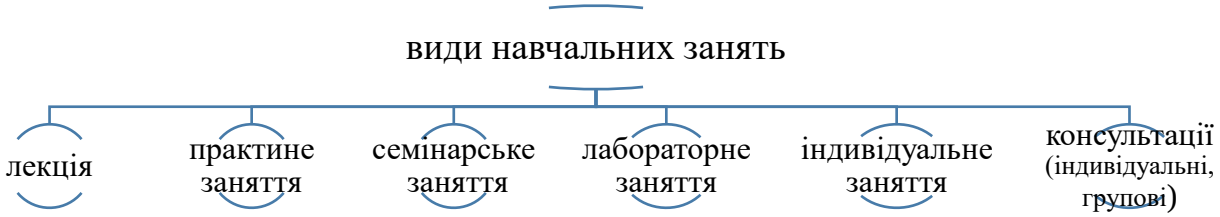

Рис. 1. Види навчальних занять з вищої математики у закладах вищої освіти

Основною формою проведення навчальних занять з вищої математики у закладах вищої освіти, яка призначена для засвоєння теоретичного матеріалу є *лекція*.

Лекція (з лат. *lektio* – читання) – це структурний, логічно завершений, науково обґрунтований, послідовний і систематизований виклад певної наукової проблеми, теми чи розділу навчального предмету, ілюстрований наочністю та демонструванням прикладів.

В системі сучасної освіти лекція – це організаційна форма навчання, що є власне специфічним способом взаємодії викладача і здобувачів, у межах якої реалізується різноманітний зміст і різні способи навчання і, водночас, є методом навчання як монологічного викладу навчального матеріалу в систематичній та послідовній формі, сконцентрованій переважно навколо фундаментальних проблем вищої математики.

Крім цього, лекція з вищої математики виступає методологічною та організаційною основою для всіх навчальних занять відповідного освітнього компонента, у тому числі самостійних. *Методологічна*, оскільки вводить здобувача в науку взагалі, надає освітньому компоненту концептуальності; *організаційна*, тому що всі інші форми навчальних занять тісно пов’язані з лекцією, найчастіше логічно йдуть за нею, спираються на неї змістовно та тематично.

Дидактична цінність лекції полягає в тому, що студент отримує можливість засвоїти значно більший об’єм інформації ніж за той самий час самостійної роботи. Під час лекції досвідчений викладач може ефективно впливати на погляди і переконання студентів, формувати у них уміння критично оцінювати отриману інформацію, ознайомлювати слухачів з новітніми науковими досягненнями.

Лекції проводяться лекторами, професорами і доцентами, викладачами закладу вищої освіти, а також провідними науковцями або ж спеціалістами, які можуть бути запрошеними для читання лекцій.

Сучасна дидактика вимагає, щоб у закладах вищої освіти лекція забезпечувала:

- великий об’єм чітко систематизованої і концентрованої, методично грамотно опрацьованої сучасної наукової інформації;
- доказовість і аргументованість суджень;
- достатню кількість фактів, аргументів, прикладів, текстів, які підтверджують основні тези лекції;
- ясність, логічність і лаконічність викладу інформації;
- жвава і цікава подача змісту лекції, яка підсилюється чіткістю вимови, граматичною та стилістичною правильністю мовлення лектора, вмілим використанням допоміжних засобів – інтонації, міміки, жестів;
- активізацію навчально-пізнавальної діяльності здобувачів різноманітними засобами;
- чітке окреслення кола запитань для самостійного опрацювання з посиланням на джерела;
- надання здобувачам можливості слухати, осмислювати і нотувати отриману інформацію;
- встановлення контакту з аудиторією та забезпечення ефективного зворотного зв’язку;
- педагогічно доцільне використання різноманітних засобів наочності;
- педагогічну завершеність (повне висвітлення наукової проблеми чи теми з логічними висновками).

Кожну лекцію готують та проводять у строгій відповідності до основних *дидактичних принципів*: науковості; системності і систематичності; наочності; формування пізнавальної активності здобувачів; групового й індивідуального підходу; навчання на високому рівні складності; міцності оволодіння знаннями, уміннями і навичками.

Досвідчені лектори використовують різні типи лекцій для успішного досягнення програмних результатів навчання відповідного освітнього компонента. Основні типи лекцій з вищої математики у закладах вищої освіти наведено на рис. 2.

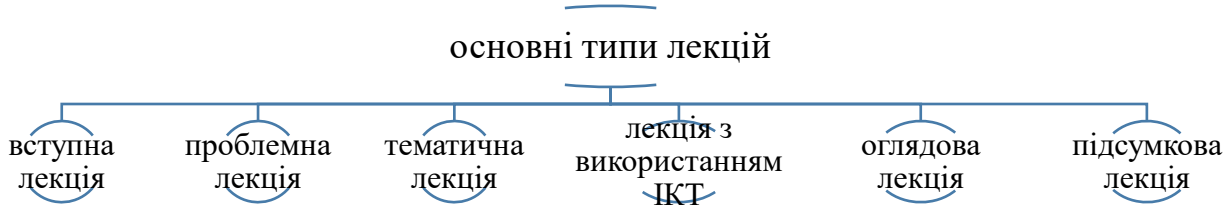

Рис. 2. Основні типи лекцій з вищої математики у закладах вищої освіти

Зазвичай вивчення дисципліни розпочинають вступною лекцією на якій лектор знайомить здобувачів з предметом, з метою викликати інтерес та створити базу для подальшого успішного навчання, показати, як знання з вищої математики можуть бути корисними у майбутній професійній діяльності. Лектор дає загальне уявлення про те, які теми будуть розглядатися протягом курсу, які методи навчання будуть використовуватися (лекції, практичні заняття, самостійна робота), як будуть оцінюватися знання здобувачів в ході поточного та підсумкового контролю.

Виклад основного матеріалу здійснюється на тематичних (інформаційних) лекціях з широким використанням сучасного арсеналу інформаційно-комунікаційних технологій. В залежності від рівня сприйняття студентською аудиторією частина матеріалу курсу може бути винесена на оглядову лекцію. Наприкінці курсу доцільно прочитати підсумкову лекцію. *Підсумкова лекція* – це не просто повторення пройденого матеріалу, а важлива складова навчального процесу – можливість систематизувати знання здобувачів, підвести підсумки

курсу та підготувати їх до подальшого навчання або практичної діяльності. Така лекція має на меті створити логічну структуру курсу, виділити ключові поняття та принципи, звести воєдино вже відомі математичні факти та ідеї, показати їх взаємозв'язки, провести аналіз основних теоретичних положень та їх практичного застосування за фаховим напрямком підготовки здобувачів та, зрештою, об'єднати отримані знання в єдину систему.

Практичне заняття – форма навчального процесу, при якій викладач організовує детальний розгляд здобувачами окремих теоретичних положень освітнього компонента та формує навички і вміння їх практичного застосування через індивідуальне виконання відповідно сформульованих завдань (Наказ Міністерства освіти України від 2 червня 1993 р. № 161). Саме практичні заняття з вищої математики відіграють ключову роль у формуванні міцних знань та навичок здобувачів. Вони дозволяють закріпити теоретичний матеріал, розвивати логічне мислення, навчитися застосовувати математичні методи для розв'язання задач.

Практичне заняття є комбінацією демонстрації викладачем розв'язання типових задач та активної залученості здобувачів до розв'язання аналогічних завдання самостійно. На наступному кроці студенти розв'язують задачі під керівництвом викладача, який надає індивідуальні консультації. На практичних заняття варто використовувати групову роботу студентів, пропрацьовувати кейси задач, які максимально адаптовані під практичну прикладну фахову спрямованість матеріалу, який вимагає застосування саме таких математичних моделей, які вивчаються в курсі вищої математики.

Головними завданнями практичних занять є:

- поглиблення й уточнення знань, отриманих на лекціях і в процесі самостійної роботи;
- формування інтелектуальних навичок та умінь планування, аналізу й узагальнень, опанування навичок організації фахової діяльності;
- накопичення первинного досвіду організації математичного дослідження та технікою управління ним;

- оволодіння початковими навичками керівництва, мікроменеджменту та самоменеджменту при розв’язуванні конкретних прикладних задач.

Важливо акцентувати увагу на необхідності ретельного вивчення теоретичних основи перед розв’язанням задач, правильно зрозуміти умову задачі та вміти виділити основні її елементи, уважно виконувати обчислення і перевіряти отримані результати. Адже саме математика формує загальнолюдську культуру правильності, логічності, лаконічності та контрольованості побудови суджень. Молоді люди часто не усвідомлюють що ці якості сформовані завдяки багаторічному вивченню математики, починаючи з молодшої школи.

Семінарські заняття – це інтерактивна форма навчання, яка доповнює лекції та практичні заняття. Вони передбачають активну участь здобувачів у обговоренні теоретичного матеріалу, розв’язанні задач та дискусіях. На відміну від лекцій, де студенти переважно слухають, на семінарах вони безпосередньо залучені до навчального процесу. Обговорюючи математичні факти, теореми, їх доведення, приклади та інше, студенти формують міцніші знання та розуміння складних математичних концепцій. Завдяки активній участі в обговореннях, здобувачі краще засвоюють теоретичний матеріал, навчаються критично оцінювати інформацію. Семінари готують студентів до самостійного вивчення вищої математики та проведення наукових досліджень. Власне ефективними семінарські заняття можуть бути лише коли здобувачі мають гарний базовий рівень підготовки, мотивовані на самостійне опрацювання матеріалу і готові до самостійного наукового пошуку. Власне семінарські заняття з вищої математики можна й потрібно використовувати на старших курсах.

Лабораторні заняття з вищої математики відіграють важливу роль у процесі навчання, поєднуючи теоретичні знання з практичним застосуванням. Вони дозволяють здобувачам не тільки зрозуміти абстрактні математичні поняття, але й розвинути навички розв’язання задач, аналізу даних та використання сучасних математичних інструментів для розв’язання реальних проблем. Нині лабораторні заняття передбачають використання математичних програм і пакетів (MATLAB, Mathematica, Maple тощо), що дозволяє автоматизувати розрахунки та візуалізувати результати. Лабораторні заняття

орієнтовані на формування вміння застосовувати математичні методи до конкретних задач, що є важливим для майбутньої професійної діяльності.

На лабораторних заняттях здобувачі виконують різноманітні математичні завдання, використовуючи вивчені теореми та методи, описують і аналізують реальні явища за допомогою математичних моделей, навчаються збирати, обробляти та аналізувати експериментальні дані за допомогою статистичних методів та пишуть програми для їх розв'язання.

Важливо сформувати розуміння у сучасної молоді, що наявність потужних математичних пакетів не може замінити лекцій, практичні та семінарські заняття. Наявний арсенал математичних пакетів лише полегшує обчислення для коректно побудованих математичних моделей, а результати розрахунків маю бути професійно інтерпретовані для застосування на практиці в прикладних задачах, які були предметом моделювання. Власне лабораторні заняття є лише однією зі складових навчальної діяльності і не можуть собою замінити інші форми навчальних занять.

Невід'ємною складовою освітнього процесу опанування вищої математики є *групові та індивідуальні консультації*. Вони дозволяють здобувачам отримати додаткову допомогу у вивченні матеріалу, розібратися зі складними темами та закріпити знання, створюють платформу для обміну думками та ідеями між студентами, що сприяє глибшому розумінню змісту освітнього компонента.

Власне групові консультації є невід'ємною складовою практичних, семінарських та лабораторних занять який повсякчас використовується викладачем в якості компоненту відповідних занять. Індивідуальні консультації ефективні як для здобувачів, які мають проблеми із засвоєнням основного матеріалу так і для сильних студентів, яким необхідно допомогти із засвоєнням складних неочевидних фактів, які не розглядались на заняттях.

Окремо необхідно відзначити консультацію перед іспитом – це цінна можливість для здобувачів отримати додаткову допомогу, розібратися зі складними темами та підготуватися до контрольного фінального оцінювання. На такій консультації фокусуються на конкретних темах, які будуть включені до іспиту, передбачають розв'язання типових іспитових завдань, тобто за своєю

формою вони нагадують підсумкову лекцію, з тією особливістю, що здобувачі не просто слухають пояснення викладача, а й беруть активну участь у розв'язуванні задач, обговоренні питань та формулюванні власних запитань. Такі консультації допомагають здобувачам подолати тривогу перед іспитом та сприяють створенню позитивного настрою і, як наслідок, дозволяють краще підготуватися до іспитів і отримати більш високі бали.

1.5. Структура та етапи навчального заняття

Структура та етапи навчального заняття з вищої математики можуть бути дуже варіативними. Кожне заняття насамперед залежно від теми, рівня підготовки студентів, а також індивідуального стилю викладача і студентської аудиторії є неповторним освітянським феноменом. Однак, існують певні загальні принципи, які необхідно враховувати при плануванні та проведенні занять з вищої математики у закладах вищої освіти.

Крім математичного наповнення, готуючи кожне заняття з вищої математики, необхідно ретельно продумувати мотивацію так званої «*навчальної поведінки*» здобувачів. Це феноменологічне поняття особливо чутливе при вивченні курсів вищої математики. Воно є складним, обумовлене багатьма факторами, що впливають на мотивацію здобувачів і їх ставлення до матеріалу. Проте «*навчальна поведінка*» – це насамперед поєднання трьох ключових мотивів.

Щоб розробити ефективні стратегії управління навчальною поведінкою студентської аудиторії, викладачі повинні вміти допомагати розбудовувати три різні типи стосунків: взаємини, які здобувачі підтримують з оточуючими, щоб вони могли розвивати значущі професійні відносини в середовищі професійного ком'юніті; відношення здобувачів до себе, щоб розвинути впевненість у собі і зв'язок із навчальною програмою освітнього компонента, якій вони мають слідувати, щоб досягти відповідних навчальних цілей.

Викладачам важливо сформувати власний стиль викладання, глибоко розуміти зміст і місце свого освітнього компонента та знати індивідуальні

потреби кожного здобувача, щоб успішно сприяти формуванню сильної навчальної поведінки при вивченні вищої математики (рис. 3).

Слід зауважити, що готуючись до лекції слід пам’ятати про її недоліки. Власне часто лекція привчає студентів до пасивного сприймання інформації і її механічного запису, гальмує бажання самостійно опрацьовувати інші джерела окрім конспекту, звужує навчання у закладі вищої освіти до «школярства» (наприклад, простого відтворення прослуханого) тощо. Ба більше, дослідження, проведені у закладах вищої освіти свідчать, що після лекції з усього обсягу інформації студенти можуть відтворити лише 10-15%.

Рис. 3. Модель ефективного навчання

Відсутність бажання студентів активно працювати на лекції може мати декілька причин, найбільш типовими з яких є наступні:

- невідповідність рівня складності матеріалу лекції рівню підготовленості здобувачів до його сприйняття;
- надмірна теоретизація матеріалу або навпаки його спрощення, примітивізація;
- відсутність зв’язку між теоретичним матеріалом і його практичною значущістю;

- відсутність у здобувачів мотивації до вивчення вищої математики у зв'язку з відсутністю розуміння її ролі в майбутній професійній діяльності;
- недостатня психолого-педагогічна та методична підготовка викладача, його невміння цікаво і доступно викладати навчальний матеріал, продумувати кожен фрагмент лекції та зацікавити ним здобувачів.

Цікавими є дані американських фахівців, які встановили, що підготовка до інтенсивної одногодинної лекції потребує від викладача щонайменше 30-40 годин підготовки. Іншими словами, «*високий енергетичний імпульс*» лекції повинен забезпечуватися потужною і довготривалою «*акумуляцією*» інформаційної енергії. Відтак, важливим показником лекції має бути її змістовність та інформативність – сукупність нових знань з теми, їх повнота і лаконічність.

Досвідчені викладачі досягають оптимального рівня інформативності завдяки певному обмеженню надмірності інформації. Така надмірність у лекції, особливо з вищої математики, показує наскільки обсяг запропонованого лектором матеріалу перевищує його мінімальний обсяг, безумовно необхідний для передавання певних ключових знань.

Експериментально встановлено, що слухач зазвичай може запам'ятати і відтворити не більше 5-9 одиниць інформації. Тому на лекції доцільно аналізувати не більше 5 основних питань. Що ж стосується кількості візуалізації та графічного представлення математичної інформації, то тут слід обмежуватися максимальним числом – 9, що є межею короткотермінового запам'ятовування.

У закладах вищої освіти при викладанні вищої математики широко використовується метод *проблемного навчання* – це інтерактивний підхід до навчання, який передбачає створення проблемних ситуацій, що стимулюють активну пізнавальну діяльність здобувачів. На лекціях з вищої математики цей метод може значно підвищити ефективність навчання, оскільки він дозволяє: зробити матеріал більш зрозумілим і таким, що краще запам'ятовується, підвищує мотивацію, розвиває математичне мислення та розвиває навички самостійної роботи.

Для створення проблемної ситуації варто використовувати такі прийоми:

- пряма постановка проблеми;
- проблемне завдання у вигляді задачі чи запитання;
- повідомлення математичного факту, який містить суперечність;
- повідомлення протилежних (несумісних) фактів про певний математичний об’єкт;
- звернення уваги на те чи інше життєве явище, яке потрібно пояснити, описати математичною моделлю;
- повідомлення фактів, які викликають непорозуміння;
- співставлення життєвих уявлень з науковими;
- постановка запитання, на яке повинен відповісти здобувач, прослухавши частину лекції.

Засобом управління мисленневої діяльності здобувачів на навчально-проблемній лекції має бути система заздалегідь підготовлених викладачем проблемних та інформаційних запитань, які скеровують навчально-пізнавальну діяльність здобувача. базову структуру проблемної лекції наведено у тал. 2. Цінним у лекції, яка базується на широкому використанні проблемного методу є те, що логіка навчального пізнання ніби імітує логіку наукового пізнання. Важливо зауважити, що ефективність такої лекції знижується в великих аудиторіях (понад 50 слухачів), а також суттєво залежить від рівня підготовки здобувачів до такого виду роботи.

Табл.2.

Структура навчально-проблемної лекції

N	Етапи	Цілі викладача	Прийоми та способи діяльності викладача
1	Вступ.	Оволодіти увагою аудиторії, викликати інтерес.	Розпочати лекцію з несподіваної репліки, факту, зауваження, історичного екскурсу.
2	Постановка проблеми.	Показати актуальність проблеми, проаналізувати суперечності, часткові	Звернення до інтересів слухачів, їх потреб, посилання на факти, авторитетні висловлювання, аналіз

		проблеми, сформулювати загальну проблему.	усталених, але невірних суджень.
3	Розчленування проблеми на підпроблеми, задачі, запитання.	Чітко виокремити перелік проблем, задач, запитань, розкрити їх сутність.	Обґрунтування логіки розв'язання задачі, побудова загальної схеми розв'язання задачі, ідеї, гіпотези, пошук засобів розв'язання, можливі результати, наслідки.
4	Виклад строгої доказової позиції, підходів, методів, засобів розв'язання.	Показати строгі доказові обґрунтовані підходи, адекватні методи розв'язання задачі.	Обґрунтування доказів, суджень, використання методів та прийомів, які дозволяють отримати потрібний результат.
5	Узагальнення, висновки.	Сконцентрувати увагу аудиторії на головному, сформулювати резюме висловленого.	Висловлювання, твердження, що інтегрує головну ідею, думку, використання ключового аргументу, властивості, характеристики об'єкта. Ілюстрація перспективи розвитку ідеї, можливостей практичного використання отриманих результатів.

Слід зауважити, що в загальному випадку структура занять з вищої математики може варіюватися залежно від навчального закладу, освітньої програми та напрямку підготовки здобувачів, викладача та рівня підготовки студентської аудиторії. Однак, існують певні загальні принципи, які зазвичай використовуються при побудові таких занять (табл. 3).

Табл.3.

Структура навчального заняття в закладі вищої освіти

N	**Етапи**	**Тривалість, хв**	**Завдання етапу**

1	Вступна частина.	5-10 хв	*оголошення теми і мети:* чітко сформулювати тему заняття та конкретні цілі, які здобувачі повинні досягти; *актуалізація опорних знань:* короткий огляд основних понять, тверджень, формул, які будуть необхідні для розуміння нового матеріалу; *мотивація:* короткий екскурс в історію математики, практичне застосування теми або цікавий приклад, який проілюструє актуальність матеріалу.
2	Основна частина	50-60 хв	*основні поняття і теореми:* систематичний виклад теоретичного матеріалу, використовуючи різноманітні методи навчання (словесні, наочні, практичні); *приклади розв'язання задач*: демонстрація застосування теоретичних знань для розв'язання прикладів. Комбінація завдань різного рівня складності; *доведення математичних тверджень (за необхідності):* якщо доведення теорем є важливим для розуміння матеріалу, варто приділити їм достатньо часу. Однак, не варто занадто захоплюватися формальними доказами, особливо якщо вони занадто складні для здобувачів, чи майбутній фах здобувачів не вимагає володіння техніками доказів математичних фактів.
3	Заключна частина	25-30 хв	*самостійна робота студентів:* пропонувати здобувачам невеликі завдання для самостійного розв'язання. Це можуть бути задачі з підручника, розв'язання задач в аудиторії або використання інтерактивних платформ та інформаційно-комунікаційних технологій.

			обговорення результатів: перевірка виконаних завдань, колективне обговорення типових помилок і неточностей; *підведення підсумків:* повторення основних ідей, гіпотез, тверджень формул, відповіді на запитання здобувачів.

Зауважимо, що при проведенні практичних, семінарських чи лабораторних занять їх доцільно розділити на логічні блоки по 15-25 хв, які після загальної вступної частини заняття будуть слідувати описаний вище логіці в рамках кожного логічного блоку. Тобто, маючи 5-6 цілей на заняття викладач в рамках досягнення кожної цілі розбиває заняття на блоки, кожний з яких починається актуалізацією опорних знань, а далі йде основна частина із розв'язанням задач, яка закінчується рефлексією на 1-2 хв. Завершується заняття повноцінним зворотнім зв'язком по всьому пройденому матеріалу.

1.6. Форми організації навчальної діяльності студентів

Організація навчального процесу в закладах вищої освіти передбачає різноманітні форми взаємодії викладача зі студентською аудиторією, спрямовані насамперед на досягнення навчальних цілей. Вибір конкретної форми залежить від теми заняття та особливостей аудиторії здобувачів.

Форми організації навчання – це певним способом структурно-організаційно та управлінсько визначена конструкція навчального заняття, що безпосередньо залежить від його дидактичних цілей, змісту й особливостей діяльності суб'єктів та об'єктів освітнього процесу.

Форми організації навчання мають упорядкувати навчальний процес. Характерною ознакою їх класифікації є дидактичні цілі. Ба більше, кожна організаційна форма навчання може мати кілька дидактичних цілей. У дидактичному процесі найчастіше виокремлюють чотири групи організаційних форм*:* навчальні заняття, практична підготовка, самостійна робота, контрольні заходи (рис.4).

До першої групи належать: лекція, практичне заняття, лабораторне заняття, індивідуальне заняття, семінар, навчальна конференція, консультація, навчальна гра тощо. Вище ми коротко зупинились на особливостях кожної з відповідних організаційних форм, врахування яких дозволяє зробити процес навчання більш ефективним.

Рис.4. Форми організації навчання в закладах вищої освіти

Провідною формою організації процесу навчання у закладах вищої освіти є лекція, яка забезпечує системне подання наукових знань у викладі науково-педагогічних працівників.

Готуючись до заняття враховують зміст, структуру, добір прикладів та ілюстрацій, методологічне оформлення, таймінг, склад та особливості студентської аудиторії. Матеріал під час лекції подають науково, концентровано, логічно, аргументовано і доказово.

Вище ми описали основні *види лекцій:* вступна, тематична (інформаційна), оглядова, настановча, підсумкова. Часто видами лекцій також рахують проблемну лекцію, лекцію-візуалізацію, лекцію із запланованими помилками, бінарну лекцію, лекцію-прес-конференцію. Однак це не зовсім коректно, оскільки йдеться не про вид лекції, а методи їх читання: проблемна лекція – цілковито ґрунтується на проблемному методі; бінарна лекція – це специфічна імплементація методу діалогу при представлені матеріалу; лекція-візуалізація –

є ілюстрацією методу наочності; лекція із запланованими помилками – застосуванням методу пошуку помилок і розрахована на стимулювання слухачів до постійного контролю пропонованої інформації (пошук помилки: змістової, методологічної, методичної); лекція-прес-конференція – методу запитань-відповідей (проводять як науково-практичне заняття, із наперед визначеною проблемою та системою доповідей, тривалістю до 10 хв).

Лекції-консультації можуть проходити за різними сценаріями. Перша варіація – за типом «*запитання – відповіді*». Лектор відповідає упродовж лекційного часу на запитання здобувачів за матеріалами всього модуля, розділу чи усього курсу. Друга варіація такої лекції – за типом «*запитання – відповіді – дискусія*», є триєдиною сукупністю: викладення нової навчальної інформації лектором, постановка запитань і задач та організація дискусії у пошуку відповідей.

Традиційно, у закладах вищої освіти, крім лекції, використовують й інші організаційні форми навчання: практичні заняття, лабораторні заняття, семінари, науково-практичні конференції, самостійну навчальну роботу здобувачів, виробничу практику, програми академічної мобільності в інших вітчизняних чи закордонних закладах вищої освіти.

Опишемо коротко форми організації навчальної діяльності, потенціал яких, на превеликий жаль, використовується далеко не в повній мірі.

Семінар-розгорнута бесіда. На таких семінарах тему ділять на невеликі за обсягом, але органічно пов’язані між собою проблеми (задачі), які формулюють як пізнавальні, проблемні завдання. Виконання одного завдання є підставою для виконання наступного, що дозволяє залучити до активної роботи над проблематикою семінару якомога більше студентів. Важливо, що при цьому викладач заохочує слухачів виступати з уточненнями і доповненнями. Таким способом можна організувати заняття з вищої математики, на яких вивчаються до певної міри відомі слухачам теми, наприклад, «Вектори: властивості і дії з векторами», «Вступ до комбінаторики», «Методи інтегрування функцій однієї змінної» тощо.

Семінар-доповідь (повідомлення). Такий вид семінару потребує ґрунтовнішої підготовки, використання багатьох джерел. Інколи заздалегідь необхідно провести певні обчислення, спостереження, обробити числовий матеріал. Доповідач на семінарі послідовно викладає свої концепції, аргументує їх вагомими фактами, ілюструє прикладними задачами. Решта аудиторії уважно його слухають, доповнюють, підтверджують чи спростовують викладене. Цей вид семінару має великі дидактичні можливості, які легко реалізувати для достатньо активної спільноти здобувачів. Такий підхід буде ефективним при вивченні тем, що потребують математичного моделювання реальних процесів, які є типовими для напрямку підготовки здобувачів – економіка, науки про природу, комп'ютерні науки тощо. Для цього слід визначити таке коло задач, щоб можна було на конкретних прикладах розкрити органічний зв'язок вищої математики як науки з життям, активізувати пізнавальну діяльність здобувачів, навчити чи розвинути навички використання додаткових джерел.

За змістом і методикою організації до семінару-доповіді близьким є семінар, на якому обговорюють реферати й письмові (розрахункові) роботи. Для цього необхідно заздалегідь подбати про взаємне рецензування письмових робіт здобувачів, ознайомитися з роботами та рецензіями на них, відібрати кращі для представлення та обговорення на занятті.

Коментоване читання як самостійне семінарське заняття практикують вкрай рідко. На заняттях з вищої математики воно може бути ефективним на старших курсах, коли є необхідність опрацювати результати певних науково-дослідницьких робіт. Основним завданням коментованого читання є навчити здобувачів глибоко аналізувати і правильно тлумачити науковий матеріал.

Семінар-диспут захоплює студентів, стимулює інтерес до вищої математики, сприяє глибокому засвоєнню навчальної інформації, розвиває логічне мислення, мовленнєву діяльність, виховує принциповість. Необхідно чітко сформулювати тему заняття й залучити до роботи всю студентську аудиторію. Перелік запитань має містити явні та приховані суперечності, які спонукає думати, доводити вірність своєї точку зору. Викладач має бути тактовним, коректним, уважним. Такий тим діяльності також є ефективним на

старших курсах, особливо при вивченні прикладних тем, математичний апарат яких ще остаточно не сформований і потребує широкого диспуту, щодо ефективності застосування тих чи інших математичних концепцій, підходів та методів.

Факультатив – в загальному випадку, це навчальний предмет, курс, що вивчається студентами за бажанням із метою поглиблення знань. Коли ж безпосередньо йдеться про вищу математику, то факультатив ефективний при необхідності поглибленого вивчення окремих додаткових розділів вищої математики, вивчення додаткових можливостей застосування математичних методів для практичного моделювання реальних життєвих ситуацій безпосередньо пов'язаних із здобуттям спеціальності, міжпредметних компетентностей тощо.

Кожен вид залежно від дидактичної мети може бути теоретичним, практичним, комбінованим. Відповідно до типу факультативу формують групи, добирають форми й методи роботи.

Предметний гурток створюють із різних освітніх компонентів чи їх розділів. Завданням предметних гуртків з вищої математики є поглиблення набутих знань, розвиток інтересів і здібностей. Окрім систематичних занять, учасників гуртків залучають до масових виховних заходів: тематичних вечорів, конкурсів, олімпіад, тижнів і місячників знань, ведення інтернет-сторінок, груп, блогів тощо. Це сприяє поглибленню знань і підвищує інтерес до освітніх компонентів не тільки учасників предметних гуртків, а й інших здобувачів. До проведення гуртків варто залучати здобувачів різних курсів. Це сприяє кращій залученості здобувачів, формує сучасне студентське ком'юніті, яке дозволяє викладачам широко використовувати горизонтальні зв'язки на студентському рівні для популяризації як науки так прикладної сфери її застосування.

Домашня навчальна робота. Основним її завданням є розширення і поглиблення знань з вищої математики, розвиток навичок регулярної самостійної навчальної роботи, самоконтролю, виховання самостійності, активності та відповідальності.

До домашніх завдань відносять роботу з матеріалами підручників та навчальних посібників, виконання різноманітних задач, розрахункових, графічних робіт тощо. Зауважимо, що впродовж тривалого часу не варто пропонувати однотипні завдання. Домашні завдання мають містити елементи новизни, передбачати різнотипні способи їх виконання. Ба більше, доцільно практикувати індивідуальні завдання, які спрямовані як на усунення прогалин в знаннях слабших студентів так і мати на меті поглибити знання успішних здобувачів. Власне коли таку роботу пропонують сильнішим студентам – це є пропедевтикою їх майбутнього наукового поступу, формує у них впевненість в своїх силах при постановці задачі різного ступеня складності і дослідженості.

Зауважимо, що навчальний час, який відводиться для самостійної роботи здобувачів, регламентується навчальним планом і робочими програмами і повинен становити не менше 1/3 та не більше 2/4 загального обсягу навчального часу, відведеного для вивчення конкретного освітнього компонента.

Ділові ігри є найскладнішою формою ігрових занять, під час яких імітують колективну професійну діяльність. Вони є не просто розвагою, а насамперед потужним дидактичним інструментом навчання, оскільки забезпечують закріплення й комплексне застосування знань, здобутих під час вивчення різних тем та навіть предметів; формування уяви про професійну діяльність за обраним фахом; розвиток навичок моделювання та управління прикладними процесами.

Професійні ігри призначені для розвитку творчого мислення, формування практичних навичок та вмінь, формування індивідуального стилю спілкування й поведінки під час колективного розв’язання задач. До певної міри вони слугують репетиціями елементів фахової діяльності.

Ділові та професійні ігри із широким застосуванням математичних компетентностей здобутих на заняттях з вищої математики доцільно проводити на старших курсах. Тут знання з математики мають ілюструвати як класичні hard skills мають використовуватись при формуванні прикладних soft skills максимально органічних для вибраного здобувачем фаху підготовки.

Контрольні заходи – є невід’ємною складовою і особливою формою навчальних занять у закладах вищої освіти. До них відносять іспити (заліки),

модульний контроль, контрольні роботи, контрольна перевірка оволодіння фаховими знаннями, навичками та уміннями з різноманітних освітніх складових.

Контрольна робота з вищої математики є важливим інструментом для оцінки знань здобувачів та ефективності навчального процесу. Для викладача підготовка до такої роботи – це не просто складання завдань, але й можливість систематизувати матеріал, виявити потенційні труднощі студентів та скоригувати подальший навчальний процес. Складаючи завдання контрольної роботи важливо комплексно оцінити знання студентів – теоретичних питань, розрахункових задач, доведення математичних фактів тощо. Завдання повинні відповідати вивченому матеріалу та перевіряти розуміння ключових понять і методів, мати різний рівень складності, щоб врахувати різні рівні підготовки студентів. Частина завдань може бути пов’язана з практичними застосуваннями положень відповідного освітнього компонента або містити елементи новизни, що стимулює інтерес студентів.

Викладачеві, з метою уникнення суб’єктивізму при перевірці робіт, необхідно заздалегідь визначити, за якими критеріями будете оцінюватись кожне завдання. Крім цього, варто визначити, який відсоток загальної оцінки буде припадати на кожне завдання, тобто його ваговий коефіцієнт в загальній оцінці за роботу.

Викладачу необхідно підготувати певну кількість варіантів, яка залежить від кількості студентів та часу, необхідного для перевірки робіт. Завдання у різних варіантах повинні бути рівноцінними за складністю. Варіанти повинні бути достатньо відмінними, щоб ускладнити можливість списування. Зразок контрольної роботи з вищої математики наведено у Додатку С.

Здобувачі мають бути заздалегідь проінформовані про дату, час проведення контрольної роботи, формат завдань та інші важливі деталі. Здобувачам має бути забезпечена спокійна атмосфера для роботи, бути в наявності необхідні матеріали (папір, ручка, тощо). Під час проведення контрольної роботи слід стежити за тим, щоб студенти не списували та дотримувалися правил.

Організовуючи освітній процес з опануваннями різними освітніми компонентами з вищої математики викладам варто проводити не лише

контрольні роботи, а й інші форми поточного контролю (тести, опитування тощо). Після перевірки робіт обов'язково надавати здобувачам зворотній зв'язок, вказуючи на їхні помилки та недоліки, враховувати індивідуальні особливості кожного студента та надавати необхідну допомогу. Слідуючи принципу інноваційності в організації освітнього процесу у сучасних закладах вищої освіти, застосовувати онлайн-платформи для створення та перевірки контрольних робіт.

Власне важливо усвідомлювати, що підготовка до контрольної роботи з вищої математики – це відповідальний процес, який вимагає від викладача не лише знань математики, а й педагогічних навичок. Дотримання наведених рекомендацій допоможе створити ефективну систему оцінювання знань здобувачів та сприяти їхньому успішному навчанню.

2. Методика організації навчальних занять у закладах вищої освіти

2.1. Методика підготовки та проведення лекцій

Значне місце у організації освітнього процесу у закладах вищої освіти для підготовки сучасних фахівців належить лекціям.

Лекція (лат. *lectio* – читання) – систематичне, наукове і послідовне викладення навчального матеріалу, будь-якого питання, теми, розділу, освітнього компонента, методів науки. Слово «лекція» має латинське походження і в перекладі українською означає «*читання*». Традиції викладання матеріалу через дослівне читання раніше написаного тексту (конспекту) започаткована університетами ще у Середньовіччі. До сьогодні, наприклад, в Англії вважають обов'язковим, щоб професор університету приходив на заняття з текстом лекції і користувався ним, викладаючи матеріал.

Однак загалом в переважній більшості країн ця традиція втратила свій історичний контекст, і поняття «*лекція*» означає не лише читанням раніше підготовленого тексту, а радше є специфічним методом чи формою (за різними класифікаціями) вивчення матеріалу.

Метою лекції є власне допомога здобувачам оволодіти методами самостійної роботи з підручниками, посібниками, першоджерелами. Провідна

роль лекції у закладах вищої освіти у викладанні навчальних дисциплін нерозривно пов'язана з їх змістовим аспектом, організаційними засадами та методичними особливостями. Основним змістом лекції власне є центральні методологічні, теоретичні й практичні складові тематики представленої на відповідному занятті. Зауважимо, що у лекції розкривають не всі питання теми, а найважливіші, найсуттєвіші, що вимагають наукового обґрунтування, строго доведення тощо.

Варто окремо зазначити, що лекція має доповнюватись відповідним голосовим оформленням; відпрацьованою мімікою й жестами. Професійно підготовлена лекція передбачає репетиції (перед дзеркалом і з використанням ІКТ) із хронометруванням часу усієї лекції та окремих її складових.

Науково-педагогічним працівникам відомо, що за своєю дидактичною сутністю лекція одночасно постає як:

a) *організаційна форма навчання* – специфічний спосіб взаємодії викладача і здобувача, у межах якого реалізують різноманітний зміст і різні методи викладання;
b) *метод* – викладання навчального матеріалу освітнього компонента в систематичній, чітко структурованій, послідовній формі.

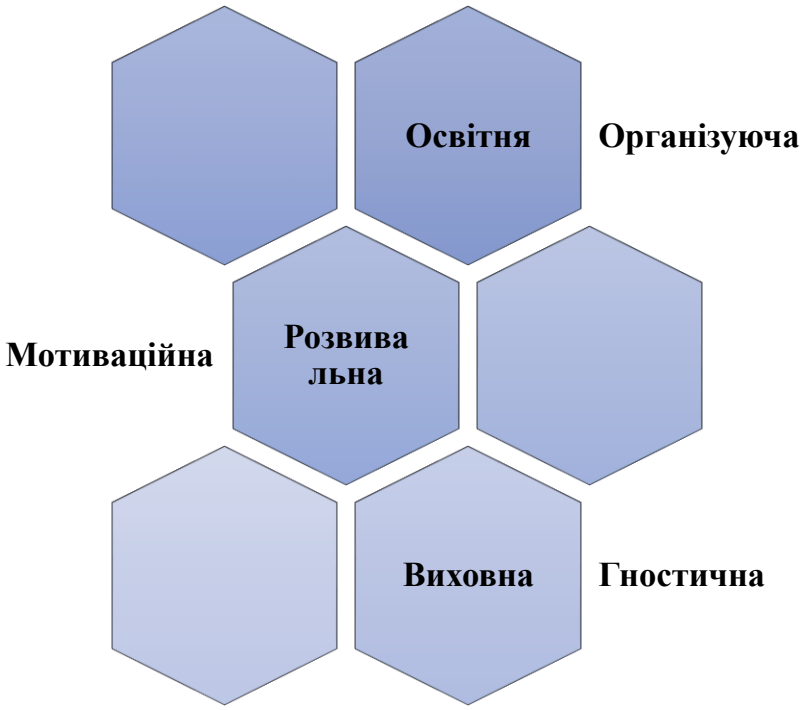

Рис.5. Функції лекції

Саме тому варіація лекційної форми від класичної інформаційної до лекції проблемного характеру створює дієву платформу, яка наповнює освітній процес реальними формами взаємодії викладача і студентів при обговоренні ключових проблем відповідних освітніх компонентів. Власне реалізація лекції в такому контексті дозволяє викладачу перейти від простої передачі інформації до активного засвоєння змісту навчання із залученням механізмів теоретичного мислення та усієї глибинної структури психічних функцій слухачів. Така реалізація освітнього процесу призводить до зростання ролі діалогічної взаємодії та спілкування під час лекції, стрімко зростає значення соціального контексту у формуванні професійно важливих якостей особистості майбутнього фахівця.

Важливо зауважити, що не залежно від виду обраної лекції за будь-яких обставин вона є носієм певних *функцій навчання* (рис. 5).

Освітня функція лекції має забезпечити можливості для оволодіння змістом навчального матеріалу як у контексті історичного поступу еволюції наукової думки так і ознайомити з досягненнями сучасної науки, дозволяє усвідомити перспективи подальшого розвитку наукової думки у відповідних областях знань, а також розкриття можливостей використання конкретних знань у професійній діяльності здобувачів. Водночас лекція допомагає здобувачам ознайомитися з літературою, тенденціями наукових досліджень науковців, науковими школами, систематизувати наукову інформацію.

Розвивальна функція має на меті забезпечувати оптимальні умови для інтелектуального розвитку особистості здобувачів через залучення їх до активної розумової діяльності. Розвиток і навчання – нерозривно пов'язані процеси. Розумовий розвиток є передумовою успішного навчання здобувача, а навчання, водночас, сприяє розвиткові особистості.

Виховна функція лекції забезпечує можливість формувати у здобувачів морально-духовні якості через зміст навчального матеріалу та їх налаштування на конкретну пізнавальну діяльність. Зміст матеріалу сприяє формуванню наукового світогляду, соціальної зрілості, громадянської відповідальності, естетичної культури і працелюбності. На кожному навчальному занятті з вищої математики (насамперед лекції) слід створити ефективні умови для розв’язання

задач прикладного змісту в т.ч. які спрямовані на розумове, моральне, естетичне і фізичне виховання. Щонайменше саме математика є одним із взірців культури навчальної праці яка реалізується через чіткість запису умов задачі, позначення змінних величин, опису їх характеристик та параметрів і т.і. Переважна більшість навіть дорослих людей рідко замислюються над цим аспектом, тим більше не надають йому гідної ваги. Але педантизм, лаконічність міркувань, вимогливість, контроль, самоконтроль як soft skills фахівців сформовані не в останню саме на навчальних заняттях з математики.

Організуюча функція вкрай важлива з точки зору мобілізації здобувачів до навчальної діяльності. Лекція сприяє тому, щоб студент отримав психолого-педагогічне орієнтування для організації усіх похідних ланок своєї навчальної та професійної діяльності.

Мотиваційна функція лекції реалізується у той спосіб, що у здобувачів стимулюється прагнення до навчальної самостійної діяльності щодо оволодіння професійними знаннями, навичками та уміннями, розвивається інтерес до постійного пошуку нових знань, професійної та соціальної активності, розвитку і формування позитивних інтересів тощо.

Гностична функція націлена на те, щоб викликалти позитивні емоції, естетичну насолоду від процесу здобуття знань та змісту лекційного матеріалу, спілкування з лектором і студентським ком'юніті. Власне вона має сприяти розвитку позитивного мислення та внутрішньої мотивації майбутніх фахівців для саморозвитку та навчання потягом життя.

Зауважимо, що підготовлений текст лекції є лише матеріалом до неї. Якщо лектор читає текст у кімнаті без слухачів, то й це не є лекцією. Лекція – це насамперед академічне дійство, у якому беруть участь педагог і студенти. Методика й техніка проведення лекції вимагають розв'язання багатьох різноаспектних задач.

Охарактеризуємо психолого-педагогічні вимоги до проведення лекції у закладах вищої освіти, які окреслюють методику і техніку оптимальності лекційного дійства:

- педагог має володіти технікою організації студентської аудиторії на ефективну діяльність на занятті;
- викладач постійно має тримати себе на рівні належної культури в одязі, зовнішності, використанні додаткових атрибутів, бути взірцем для здобувачів;
- обов'язково необхідно вдаватися до актуалізації опорних знань, які є передумовою розуміння нового навчального матеріалу лекції. На початку лекції важливо сконцентрувати увагу студентів на сприйнятті навчального матеріалу. Цікаві запитання сприяють концентрації уваги, гальмуванню нервових збуджень у корі головного мозку від попередніх подразників та допомагають перебудувати мислення в бажаному напрямі;
- необхідно чітко сформулювати тему лекції, визначити мету, вказати (якщо це можливо) професійну спрямованість навчального матеріалу; ознайомити з основними питаннями, які буде розглянуто; надати здобувачам список джерел з коментарями про методику їх використання;
- ефективність лекції як методу навчання значно зростає, коли педагог використовує опорні сигнали: рисунки, схеми, модельні задачі, таблиці, ключові слова;
- ключовим чинником, що впливає на ефективність лекції, є мовна культура педагога. Щодо цього потрібно виокремити кілька аспектів (рис. 6).

Стилістичні особливості мовлення. Зазвичай прийнято виокремлювати низку функціональних стилів: художній, офіційно-діловий, публіцистичний, науковий, рольовий. Для академічної лекції з вищої математики характерними є науковий і розмовний стилі. Водночас у мовленні лектора можуть бути елементи публіцистичного та художнього стилів.

Правильність мовлення – визначають за його відповідністю мовним нормам. Тому будь-яке порушення цих норм зумовлює внутрішній опір аудиторії, знижує авторитет лектора. Чітке дотримання мовних норм – невід'ємна складова педагогічної культури викладача.

Багатство мови. Мова лектора вирізняється оригінальністю, різноманітністю, гнучкістю, лексичним багатством, умінням вільно

користуватися усіма її ресурсами, мелодійністю, тональністю. Багатство мови є показником високої загальної культури лектора, його ерудиції, досвіду.

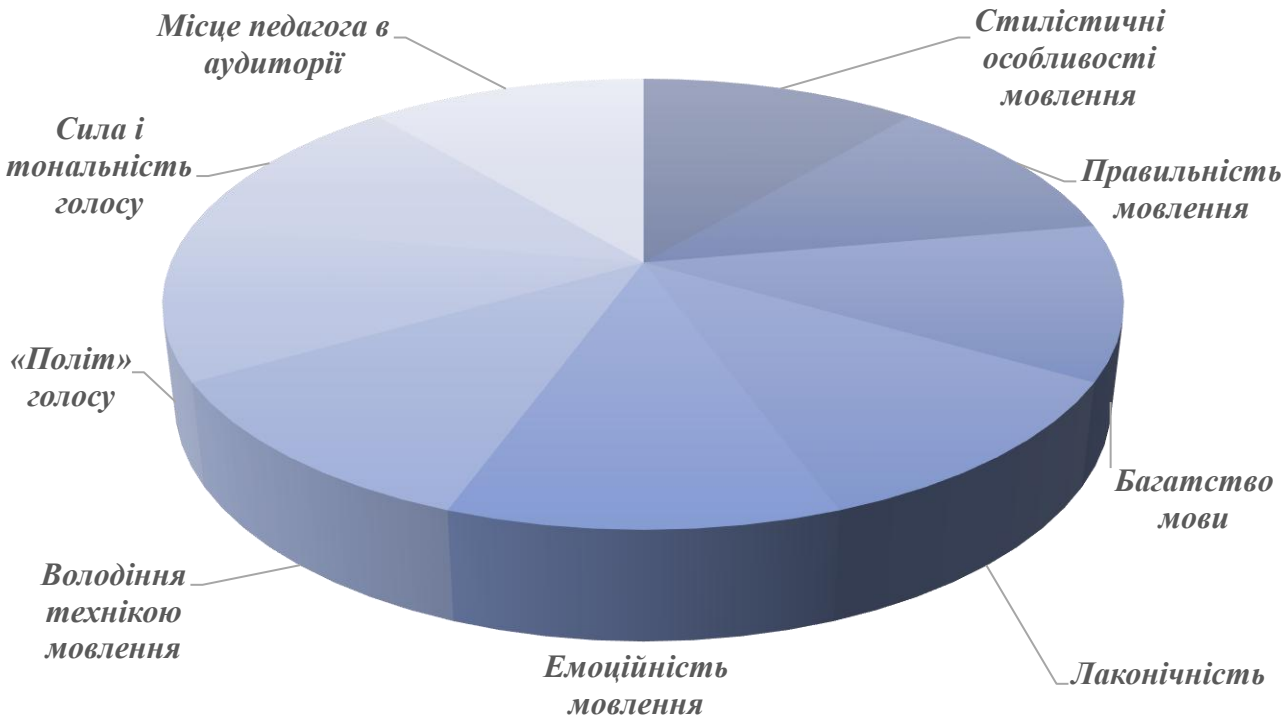

Рис.6. Ключові аспекти мовної культури лектора

Лаконічність. Стиль викладу матеріалу – стислий, виразний, важливо уникати багатослів'я, за яким важко відчути головну думку. Необхідно прагнути зрозумілості мовлення. Точність, виразність мовлення залежить передусім від того, наскільки глибоко і ґрунтовно педагог засвоїв матеріал своєї лекції.

Емоційність мовлення. Ще раз підкреслимо, що академічну лекцію не слід позбавляти експресивності (виразності, підкресленого виявлення почуттів, переживань). Експресивна мова лектора викликає певні емоції у студентської аудиторії; надає мовленню емоційності, виразності, спонукає до емоційного збудження здобувачів.

Володіння технікою мовлення. По-перше, педагог має досконало знати побудову голосового апарата, фізіологічні особливості його функціонування, догляд за ним. *По-друге*, розрізняти типи дихання (фізіологічне і фонаційне) та види дихання (ключичне, реберне, діафрагмальне). *По-третє*, володіти технікою дихання. *По-четверте*, уміти структурувати текст, робити наголоси

(орфографічний, логічний), розрізняти мовленнєві паузи (психологічну, логічну, гастрольну, повітряну).

«Політ» голосу. У процесі читання лекції необхідно дбати, щоб *«політ» голосу* лектора поширювався всією аудиторією. Звуки мають «летіти» на рівні голів слухачів. Якщо їх «політ» здійснюватиметься на рівні робочих столів, їх «зупинятимуть» меблі; вище – губитимуться десь під стелею.

Сила і тональність голосу, що часто залежить від кількості студентів в аудиторії. Упродовж лекції сила і тональність мають змінюватися. З метою акцентування уваги слухачів на важливості окремих наукових положень силу голосу необхідно збільшувати, тональність змінювати. Монотонність мовлення лектора стомлює студентів, розконцентровує їх увагу.

Місце педагога в аудиторії. Часто спостерігаються випадки, коли лектор під час читання лекції поважною ходою рухається по аудиторії і ніби сам із собою розмірковує про певні явища чи проблеми. У такому випадку увага студентів рухається за джерелом інформації. Це веде до розсіювання уваги, до втоми. Педагог має перебувати перед студентами у колі уваги (кафедра, дошка). Лише іноді, коли студенти перерисовують рисунок, схему, таблицю, можна пройтися між рядами столів, щоб проконтролювати роботу здобувачів.

Читаючи лекцію, викладач має охоплювати поглядом усю аудиторію, психологічно тримати її в стані розумової діяльності, час від часу концентруючи увагу на окремих слухачах. Не можна, щоб, читаючи лекцію, викладач був захоплений лише своєю персоною, очі спрямовані у вікно або в якусь частину аудиторії.

З погляду ефективності навчального процесу у закладах вищої освіти всі студенти мають вести конспективні записи змісту лекцій. У процесі конспектування студент слухає, записує, аналізує, у результаті чого *працює слухова, зорова, моторна, оперативна пам'ять*. Така послідовність забезпечує систематичність опрацювання навчального курсу, сприяє не лише міцності знань, а й впливає на формування професійної культури майбутнього фахівця.

Опрацьовуючи зміст теми, варто розкрити сутність основних питань, особливо тих, які є складними для самостійного розуміння і зміст яких

недостатньо розкритий у навчальних посібниках, а решту пропонувати для самостійного вивчення. Потрібно рекомендувати залишити певну кількість сторінок у зошиті для записів результатів самостійної роботи; дати методичні поради, де віднайти необхідну інформацію, як її опрацювати, на що звернути особливу увагу.

Академічна лекція має містити не лише інформаційний, змістовий потенціал, а й соціально-педагогічний, що вимагає від викладача високої педагогічної культури і професійної майстерності.

Підкреслимо, що для розробки будь-якої лекції з вищої математики необхідно використовувати цілий арсенал методів, а саме:

- *дедуктивний метод* – передбачає, що матеріал структурується від загального до часткового, коли формуються певні висновки та заохочується пізнання студентською аудиторією часткового через загальне. Застосування дедуктивного методу ефективне за умови, що він поєднується з іншими методами, насамперед з індуктивним;
- *індуктивний метод* – еволюція думки від часткового до загального, від знання одиничних чи часткових фактів до загальних властивостей, теорій, узагальнень тощо;
- *метод аналогії*. Застосовуючи цей метод, викладач не просто вказує на схожість певних математичних об’єктів чи їх властивостей, а й допомагає здобувачам зробити аналогічний висновок, який можна сформулювати так: якщо два об’єкти мають схожість в тих чи інших аспектах, то вони, можливо, схожі й інших;
- *метод контрасту* передбачає, що у процесі навчального заняття використовуються протилежні (контрастні) аргументи і факти;
- *метод концентрації* передбачає таку побудову викладу матеріалу, коли інформація зосереджується навколо певного центрального факту, який власне є поставленою проблемою. У процесі такого навчального заняття викладач тримає її в фокусі уваги, повертається до неї, поступово розвиваючи і заглиблюючись у «центральне» положення;

- *метод ступінчатості* – педагог розкриває проблематику теми заняття, поступово переходячи від однієї складової до іншої;
- *історичний* метод викладу матеріалу є вкрай важливим розуміння історизму в еволюції математичних понять та фактів;
- *просторовий метод* передбачає подання математичних фактів і властивостей наочно, у їхній динаміці та взаємодії. Використовуючи цей метод, лектор стимулює здобувачів до створення уявних картин, використовує окремі фрагменти опису відповідних математичних фактів, властивостей об’єктів, наукових досліджень у ширшому контексті.

Окремо зазначимо, що залежно від теми, цільової установки і складу студентської аудиторії варто використовувати такі *методи викладу матеріалу:*

- *проблемний метод* варто використовувати для активізації мислення здобувачів через постановку проблеми, яка потребує розв’язання. Розв'язуючи математичні проблеми у тісній взаємодії з педагогом, студентська аудиторія формулює теоретичні узагальнення, робить висновки. Базисом проблемного викладу є той факт, що людина найефективніше інтелектуально розвивається за умов подолання труднощів в процесі самостійного розв'язання мислинневих завдань;
- *метод монологу* реалізується через монологічне викладення матеріалу. Здобувачі можуть не брати участі в його обговоренні. Педагог особисто подає навчальний матеріал через монолог;
- *монологічно-проблемний метод* є інструментом подання навчального матеріалу як розв'язання проблемних ситуацій у монолозі викладача, тобто лектор власне особисто висуває, розкриває і розв’язує проблемні ситуації;
- *пошуково-показовий метод* є поєднанням монологічного викладення з ілюстрацією логіко-психологічних аспектів. Викладач пояснює методику наукового пізнання. Здобувачі, слідкуючи за його думкою, засвоюють взірець підходу до наукового пошуку;
- *метод діалогічного викладу* – ґрунтується у тому, що педагог, пояснюючи навчальний матеріал, залучає здобувачів до процесу не лише пошуку

розв’язання проблем, а й до їх формування. Це складний інтегральний метод, який насамперед безпосередньо пов’язаний з розвитком особистості через активні розумові дії, розкриття творчого потенціалу, логічного та абстрактного мислення тощо. Як наслідок критичного осмислення такого способу пізнання, здобувач набуває компетентностей «бачити» проблеми, ставити проблемні запитання, виховувати «відчуття» проблемних ситуацій в практичній фаховій сфері;

- *метод візуалізації* є інструментом широкого використання наочних образів для розкриття змісту та різних видів навчальної інформації на заняттях вищої математики. Це одних з важливих та дієвих методів ефективного формування глибокого розуміння величезної кількості математичних понять. Яскраво представлені образи, їх сприйняття, варто розгорнути і зробити фундаментом адекватних розумових та практичних дій розвитку математичної компетентності.
- *активні методи.* Сучасний освітній процес у закладах вищої освіти неможливо уявити без так званих активних методів. На навчальних заняттях з вищої математики вони допомагають «вивільняти» свідомість, активізувати розумовий та інтелектуальний потенціал здобувачів, набувати необхідних практичних навичок і умінь особливо в частині математичного моделювання реальних процесів в природознавстві, економіці, соціальній сфері тощо.

Для того щоб лекція пройшла успішно та зацікавила здобувачів необхідна ретельна попередня підготовча робота. Відтак підготовка лекційного заняття викладачем закладу вищої освіти передбачає якісний *підготовчий етап***,** який умовно розділяють на кілька етапів:

I. *формулювання теми*;

II. *визначення мети та цілей заняття (начальних, розвивальних, виховних);*

III. *складання попереднього плану.* План варто складати поступово. Насамперед лектор окреслює загальні положення. У процесі вивчення літератури, осмислення її змісту план лекції корегується і конкретизується. Проєкт попереднього плану традиційно має такий

базовий вигляд: виокремлено логічний фокус лекції – провідна, основна ідея, виражена у вигляді гіпотези (концепції, методу) – основи лекції. Далі – вступна частина, яка актуалізує увагу та мислення здобувачів; розвиток теми у вигляді основних положень, тверджень, властивостей математичних об'єктів підкріплених відповідними аргументами, доказами, ілюстраціями, висновки;

IV. *добір і вивчення відповідних джерел.* Вивчення джерел має бути ґрунтовним. Знання матеріалу лекції свідчить про глибину і всебічну компетентність лектора за напрямком освітнього компонента, в периметрі якого власне готується лекція. Відтак необхідно опрацювати основні джерела з проблематики лекції як історичному контексті так і з урахуванням новітніх наукових результатів за тематикою лекції;

V. *складання розгорнутого плану.* Оригінальний план-конспект лекції має бути ретельно спланованим. Має бути визначений таймінг для кожного компоненту лекції; чітко сформульовані цілі заняття та матеріал, який забезпечить їх досягнення; продумані прикінцеві запитання для отримання зворотного зв'язку слухачів; передбачені оголошення домашнього завдання та питань, які виносяться на самостійну роботу, список рекомендованих джерел. Від цього повною мірою залежить успіх майбутньої лекції, і вплив, який вона потенційно матиме на здобувачів;

VI. *систематизація матеріалу з різноманітних джерел.* Досвідчені лектори мають напрацьовані банки даних сформовані прочитаними книгами, журналами, матеріалами з яких можна сформувати якісне наповнення лекції. Враховуючи стрімкий розвиток науки такі матеріали варто впорядкувати, розподіливши за тематичними блоками разом з планами і текстами лекцій.

VII. *рефлексія.* Обов'язковим є постфактумний аналіз лекційного заняття. Після проведеної лекції професійні лектори аналізують лекцію як завершене академічне дійство. Фіксують вдалі прийоми, які добре сприйняті студентською аудиторією. Ретельно обдумують прикінцеві запитання-відповіді. За результатами лектор визначає подальшу корекцію

освітньої траєкторії за освітнім компонентом – які питання вимагають додаткового опрацювання на практичних заняттях, наступних лекціях в ході самостійної роботи студентів.

Основним завданням підготовчого етапу є глибокий аналіз відібраного матеріалу його відповідності вимогам робочої програми, визначеним в ній програмним результатам навчання щоб чітко передбачити відповідний обсяг теоретичних питань, які буде розглянуто на лекції і визначити шляхи досягнення цієї мети, створити модель, яка є завершеним цілим.

За обсягом текст лекції (план-конспект) з вищої математики, яка традиційно триватиме дві академічні години, має становити 20-25 аркуші (А-4). При використанні інтерактивних платформ для читання лекції в режимі online варто підготувати презентацію з відповідним обсягом слайдів. Зразок плану-конспекту лекції з вищої математики наведено у Додатку А.

Наступний етап у освітнього процесу є безпосередній виклад змісту лекції, який можна поділити на кілька змістовних блоків: вступ; виклад матеріалу основного змісту; підсумкова частина (рис.7).

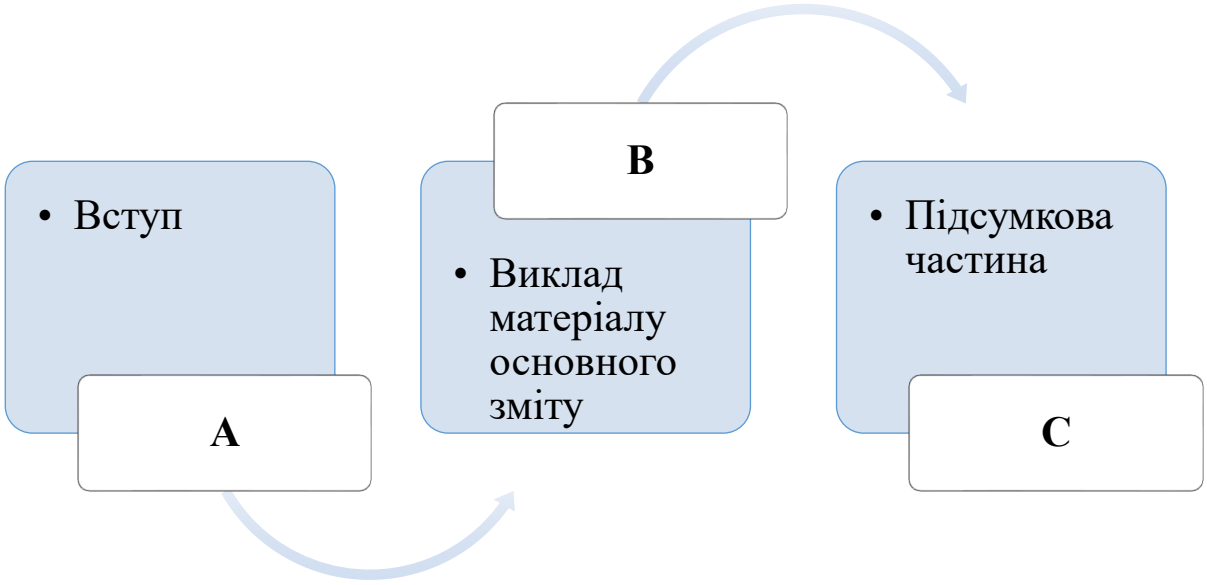

Рис.7. Змістовні блоки лекції

Вступ має бути коротким і лаконічним (5 – 10 хв). Лектор концентрує увагу здобувачів на основній ідеї лекції, меті, коротко характеризує проблематику,

розкриває її актуальність, теоретичну та практичну значущість, стан дослідженості проблематики, оголошує рекомендований список джерел. Вдалий вступ – запорука успіху заняття. Лектор, стимулюючи інтерес здобувачів, може розпочинати заняття з опису певного цікавого факту, явища, гіпотези, протиріччя, які стосуються теми лекції.

В основній частині лекційного заняття лектором викладається матеріал з основних питань лекції. Лекційне заняття з вищої математики передбачає аналіз понять, формулювання їх властивостей, доведення математичних фактів, аргументів, демонстрацію рисунків, моделей, слайдів, різних підходів до дослідження властивостей об’єктів, зв'язок із практикою, сферою застосування здобутих знань тощо.

Підсумкова частина також має бути короткою. Початок і завершення лекції – ключові етапи лекції будь-якого виду. Закінчувати лекцію необхідно на такому ж високому емоційному тлі як і розпочинати. Неприпустимим є затягування викладення, перевищення регламенту та таймінгу. Це порушує структурні вимоги до лекції. Основною метою завершальної частини є підсумок висвітленого в лекції матеріалу, закріплення і підсилення загальних вражень аудиторії, відповіді на запитання, формулювання здобувачам домашнього завдання (за необхідності) та обов’язкових завдань для самостійної роботи. Рефлексія, як обов’язковий компонент має як стимулювати слухачів до ґрунтовнішого вивчення проблематики так і сприяти корекції знань студентів на наступних навчальних заняттях.

Відтак ще раз підкреслимо, що у організації навчального процесу з вивчення будь-якого освітнього компонента у закладах вищої освіти лекції належить провідне місце. Вона є провідником для студентів у світ знань, полегшує засвоєння найскладніших теоретичних проблем вищої математики, допомагає аналізувати математичні об’єкти, їх властивості, методи розв’язання різноманітних задач, має емоційний вплив і стимулює логічне, абстрактне, просторове та творче мислення здобувачів.

Щоразу, повертаючись до повторного опрацювання академічного курсу з освітнього компонента, обов’язково необхідно переглядати зміст лекції, підбір

прикладів, аргументацію та хід доведення окремих наукових положень, враховувати нові досягнення математичної науки, появу додаткових джерел інформації, професійну спрямованість здобувачів, базовий рівень їх підготовки тощо. Лектор має враховувати очікування цільової аудиторії, під час планування та організації навчального процесу та оцінки його результатів.

Лекції з вищої математики посідають провідне місце в організації освітнього процесу в переважній більшості закладах вищої освіти за багатьма освітньо-професійними та освітньо-науковими програмами підготовки здобувачів. Це обумовлене високим теоретичним змістом, прикладним наповненням, науковою постановкою в них величезної кількості актуальних проблем відповідних галузей знання. Актуальність, змістовність практична спрямованість методики проведення лекцій досягається рівнем професійної готовності викладача, яка передбачає відповідну високу теоретичну підготовку, досконале володіння методикою викладання математики та наполегливу самостійну працю кожного науково-педагогічного працівника над підвищенням своєї кваліфікації.

2.2. Методика організації та проведення практичних, лабораторних і семінарських занять з вищої математики

В системі підготовки фахівців у закладах вищої освіти значне місце посідають практичні заняття. Їх *головним завдання* є закріплення, систематизація, формування навичок і вмінь розв’язувати математичні задачі, оволодіння апаратом наукових досліджень з відповідного освітнього компонента. Саме через практику відбувається перехід від пасивного сприйняття теоретичного матеріалу до активного його освоєння, що сприяє формуванню глибоких і міцних знань. Практичні заняття ініціюють процеси кодування та зберігання теоретичних знань у довготривалій пам’яті, трансформуючи абстрактні концепції в конкретні дії та досвід.

Практичне заняття (лат. *praktikos* – діяльний) – форма навчального заняття у закладах вищої освіти, під час якої викладач організовує для здобувачів аналіз окремих теоретичних положень того чи іншого навчального компонента, формує

навички та вміння їх практичного застосування через індивідуальне виконання відповідно підібраних математичних задач.

Викладач закладу вищої освіти, який проводить практичні заняття, за погодженням із лектором освітнього компонента завчасно готує необхідний методичний матеріал – задачі, приклади, тести, набір завдань різного ступеня складності для виявлення рівня оволодіння здобувачами відповідними теоретичними положеннями.

Основними завданнями практичних занять є:

- поглиблення й уточнення знань, отриманих на лекціях, при розв'язанні типових задач та в процесі самостійного виконання вправ для відпрацювання математичних технік;
- формування навичок і вмінь розв'язання математичних задач, аналізу, синтезу, узагальнень; здатності розкладати складну задачу на простіші підзадачі та об'єднання окремих елементів в єдине ціле;
- опанування навичок використання теоретичних та практичних знань з вищої математики у професійній діяльності;
- накопичення первинного досвіду організації моделювання прикладних природничих, економічних, соціальних процесів.
- формування математичної інтуїції та розвиток творчого підходу до розв'язання нестандартних задач.

Структура практичного заняття передбачає попередній контроль знань, навичок та вмінь здобувачів; формулювання загальної проблеми та її обговорення за участю здобувачів; розв'язання завдань, їх аналіз та обговорення; розв'язання контрольних завдань, їх перевірка та оцінювання (рис. 8). Зразок плану-проспекту практичного заняття з вищої математики наведено у Додатку В.

Оцінки, отримані на практичних заняттях, є невід'ємними складовими так званого поточного контролю за відповідним освітнім компонентом і враховуються як при допуску до фінального контролю так і при виставленні підсумкових оцінок з дисципліни (табл. 4).

Табл. 4.

Шкали оцінювання знань здобувачів в закладі вищої освіти

Національна шкала, залік	**Національна шкала, іспит**	**бали**	**Шкала ECTS-оцінок**		
Зараховано/ Passed	**Відмінно**/ Excellent	90-100	**A**	Відмінно	відмінна робота з однією незначною помилкою
	Добре/ Good	82-90	**B**	Дуже добре	вище за середнє, але з декількома помилками
		75-81	**C**	Добре	звичайна робота з декількома значними помилками
	Задовільно/ Satisfactory	65-75	**D**	Задовільно	посередньо, зі значними недоліками
		60-64	**E**	Достатньо	виконання задовольняє мінімум критеріїв оцінки
Не зараховано/ Not passed	**Не задовільно**/ Fail	35-59	**FX**	Не здано	для одержання кредиту потрібна деяка доробка
		0-34	**F**	Не здано	для одержання кредиту потрібна значна доробка

Кількість годин запланованих для практичних занять за кожним освітнім компонентом визначається навчальним планом освітньо-професійної чи освітньо-наукової програми за якими здійснюється підготовка здобувачів. Перелік тем практичних занять міститься у робочій програмі освітнього компонента. Кількість студентів на практичному занятті не повинна перевищувати половини академічної групи.

У процесі проведення практичних занять в закладах вищої освіти викладачі використовують великий арсенал методів навчання. Оскільки головним завданням практичного заняття з вищої математики як виду навчальної роботи є формування навичок та вмінь, то основними складовими мають бути розв’язання задач, побудова графіків, проведення доведень, вправи (підготовчі, пробних, за зразком, тренувальні, практичні, розрахункові, усні, письмові, професійні тощо). Тобто фокусом практичних занять є формування математичної компетентності, розвиток аналітичного, абстрактного, логічного та просторового мислення, вміння застосовувати математичні знання на практиці.

Рис. 8. Структура практичного заняття з вищої математики

Практичні заняття з вищої математики мають відповідати таким вимогам:

- кожне заняття має мати чітко визначену мету, структуру, таймінг та ґрунтуватися на міцній теоретичній основі;
- матеріал має подаватися логічно, від простих понять до складніших;
- завдання мають бути різноманітними як за типом (теоретичні, практичні, розрахункові) так і рівнем складності;
- заняття мають бути активними, з елементами дискусії, обговорення та взаємодії між здобувачами та викладачем;
- завдання мають обов’язково містити такі, що пов’язані з реальними проблемами та застосуваннями математики в майбутній практичній фаховій діяльності здобувачів. Матеріал має бути актуальним та відповідати сучасним вимогам;

- викладач має враховувати рівень підготовки кожного студента, надавати індивідуальну допомогу забезпечити оптимальні умови для формування навичок і умінь (санітарно-гігієнічні, дидактичні, виховні);
- забезпечення самостійної діяльності кожного студента;
- широке включення у систему практичних занять творчих завдань пов'язаних з математичним моделюванням реальних природничих, економічних та соціальних явищ, які відносяться до сфери професійних інтересів здобувачів;
- систематичний контроль за виконанням практичних, розрахункових завдань;
- постійне мотивування здобувачів до практичної навчальної діяльності.

На практичних заняттях з вищої математики не варто зловживати практикою, коли заняття мають колективний характер: один студент виконує завдання на дошці, а інші працюють на своїх робочих місцях. Варто впроваджувати більш ефективним підходи: викладач чітко ставить задачі, знайомить студентів з методами розв'язання, організовує роботу здобувачів з самостійного розв'язання аналогічних та складніших задач, допомагає їм усвідомити алгоритм дій та представлені математичні прийоми. Далі необхідно організувати самостійну роботу кожного здобувача в позааудиторний час.

Зауважимо, що практичні заняття у значній мірі забезпечують формування та розвиток навичок і вмінь прийняття практичних рішень у реальних умовах майбутньої професійної діяльності здобувачів, що ґрунтуються на використанні як теоретичного арсеналу вищої математики так і її методологічних засад.

Варто зазначити, що хоча на практичних заняттях з вищої математики переважно відпрацьовують теми, за якими було прочитано лекції, необхідно, щоб на цих заняттях ключові теоретичні положення передували практичній складовій. Це, по-перше, спрямовує студентів на науковий підхід до виконання практичних задач, по-друге, підвищує їх якість, по-третє, сприяє глибокому засвоєнні зв'язку фундаментальної математики з прикладною.

Лабораторне заняття (лат. *labor* – праця) – форма навчального заняття з вищої математики, на якому здобувачі під керівництвом викладача особисто

проводять імітаційні експерименти чи моделювання з метою практичної перевірки й підтвердження окремих теоретичних положень освітнього компонента, набувають практичних навичок роботи з прикладними математичними пакетами, оволодівають методикою експериментальних та розрахункових досліджень у конкретній галузі знань.

Проведення лабораторних занять з вищої математики потребує добре підготовлених, спеціально обладнаних навчальних лабораторій з комп'ютерною технікою, із доступом до відповідного програмного забезпечення, систем комп'ютерної алгебри (у разі необхідності, забезпечених відповідними ліцензіями) та інтерактивних математичних пакетів в т.ч. вільного поширення в мережі Internet. Інколи на старших курсах такі заняття доцільно проводити безпосередньо на виробництвах, в умовах реального професійного середовища здобувачів (на заводі, в науково-дослідному інституті, IT компанії, Data-центрі тощо).

Рис. 9. Структура лабораторного заняття з вищої математики

Структура лабораторного заняття передбачає проведення поточного контролю підготовленості здобувачів до виконання конкретної лабораторної

роботи, безпосереднє виконання завдань лабораторної роботи, підготовка індивідуального звіту про виконану роботу, розроблені алгоритми та отримані результати, захист результатів перед викладачем, або групою експертів, якщо це передбачено контрольними процедурами відповідного освітнього компонента.

Виконання лабораторної роботи оцінює викладач.

Оцінки, отримані на лабораторних заняттях, є невід'ємними поточного контролю за відповідним освітнім компонентом і враховуються як при допуску до фінального контролю так і при виставленні підсумкових семестрових оцінок з дисципліни (табл. 3).

Плани, технологію, та методику проведення лабораторних робіт з вищої математики розробляють кафедри, які забезпечують викладання відповідного освітнього компонента. Кількість годин на лабораторні заняття з відповідного освітнього компонента визначається навчальним планом освітньо-професійної чи освітньо-наукової програми. Конкретний перелік тем лабораторних занять – робочою програмою відповідного освітнього компонента. Замінювати лабораторні заняття іншими видами навчальних занять не можна. Лабораторні заняття з вищої математики органічно доповнюють комплекс видів навчальної діяльності, який власне забезпечує якісну підготовку сучасного фахівця. Кількість здобувачів на лабораторному занятті не повинна перевищувати половини академічної групи. Кожен здобувач має самостійно виконати всі лабораторні роботи, оформити та захистити їх результати.

У процесі організації та проведення лабораторних робіт викладачеві закладу вищої освіти необхідно акцентувати увагу на таких аспектах, як змістовність лабораторних занять з вищої математики; забезпечення навчальних лабораторій новітнім обладнанням, ліцензійним програмним забезпеченням доступом через мережу Internet до інтерактивних спеціалізованих платформ та математичних пакетів, які відповідають сучасному рівню організації використання інформаційно-комунікаційних технологій для моделювання прикладних процесів в природознавстві, економіці, соціальній сфері тощо.

Така організація освітнього процесу забезпечує максимальну автономність та самостійність здобувачів під час виконання лабораторних робіт, навчання здобувачів методів виконання робіт цього виду.

3. Нормативно правове регулювання закладів вищої освіти

3.1. Основні нормативні документи України, що регулюють систему вищої освіти

Нормативно-правова база України є базисом не тільки регулювання діяльності закладів вищої освіти всіх форм власності, але й визначає рівень фінансування сфери вищої освіти як взагалі, так і окремого закладу вищої освіти державної форми власності. Зокрема, до *нормативно-правових актів, які регулюють сферу вищої освіти*, варто віднести:

- укази та розпорядження Президента України,
- постанови та розпорядження Кабінету Міністрів України,
- накази та інші підзаконні нормативні акти Міністерства освіти і науки України, Міністерства економіки і торгівлі України, Міністерства фінансів України,
- нормативні акти місцевих державних адміністрацій, органів місцевого самоврядування.

Для того щоб змінити функціонування закладів вищої освіти та з метою оптимізації їхньої діяльності, варто спиратися на: Конституцію України, доктрини, програми, стратегії, а також прямі норми рамкового Закону про освіту; правове забезпечення механізмів розвитку освіти.

До основних документів, що регулюють діяльність закладів вищої освіти, варто віднести Конституцію України, законів України “Про вищу освіту”, “Про наукову і науково-технічну діяльність”, Державну національну програму «Освіта» («Україна XXI століття»), Національну доктрину розвитку освіти.

Відповідно до Статті 53 Конституції України кожен громадянин України має право безоплатно здобувати вищу освіту в державних і комунальних закладах вищої освіти на конкурсній основі відповідно до стандартів вищої освіти, якщо

певний ступінь вищої освіти громадянин здобуває вперше за кошти державного або місцевого бюджету.

Розвиток вищої освіти є пріоритетним у державній політиці. Заклади вищої освіти мають особливий статус та пильну увагу не тільки з боку державних органів влади та громадськості, але й з боку міжнародної спільноти. Завдяки закладам вищої освіти *формується майбутній кадровий резерв України*, але, незважаючи на надання певної автономії закладам вищої освіти, регулювання з боку держави має бути обов'язковим.

Вдала реалізація державних замовлень забезпечує соціальний та економічний розвиток країни. Підготовка фахівців з вищою освітою здійснюється за відповідними освітніми чи науковими програмами на різних рівнях вищої освіти (стаття 5 Закону України «Про вищу освіту»):

1. початковий рівень (короткий цикл);
2. перший (бакалаврський) рівень;
3. другий (магістерський) рівень;
4. третій (освітньо-науковий/освітньо-творчий) рівень;
5. науковий рівень.

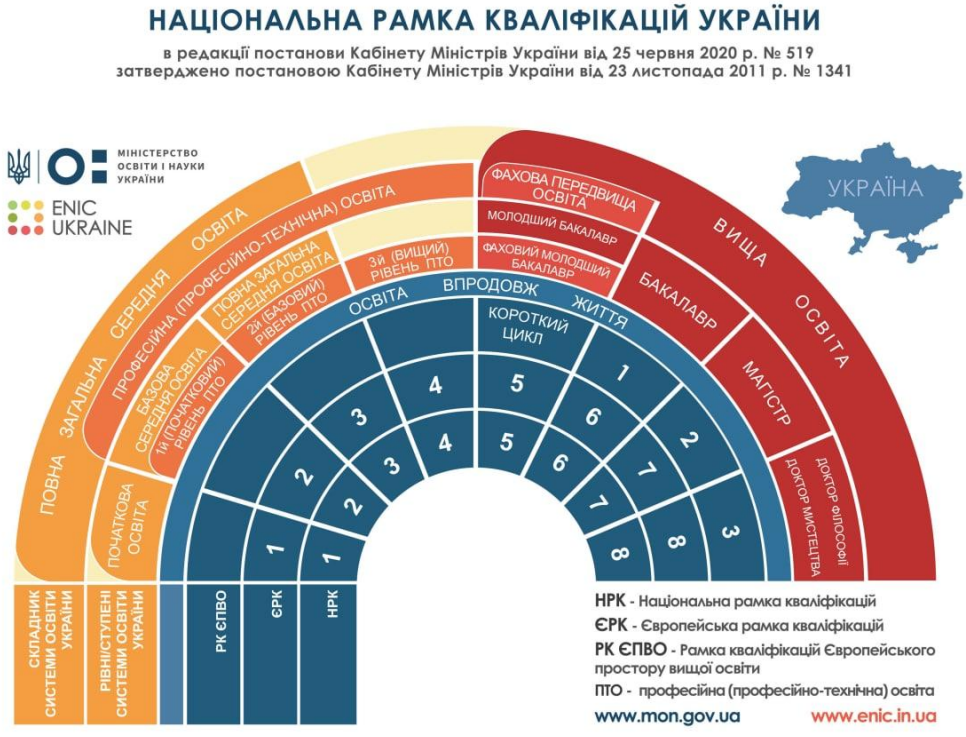

Рис. 10. Національна рамка кваліфікацій України

Зазначені вище рівні вищої освіти регулюються Національною рамкою кваліфікацій (рис. 10), яка призначена для використання органами виконавчої влади, установами та організаціями, що реалізують державну політику у сфері освіти, зайнятості та соціально-трудових відносин, навчальними закладами, роботодавцями тощо.

Закон України «Про вищу освіту» встановлює основні правові, організаційні, фінансові засади функціонування системи вищої освіти, створює умови для посилення співпраці державних органів і бізнесу з закладами вищої освіти на принципах автономії закладів вищої освіти, поєднання освіти з наукою та виробництвом з метою підготовки конкурентоспроможного людського капіталу для високотехнологічного та інноваційного розвитку країни, самореалізації особистості, забезпечення потреб суспільства, ринку праці та держави у кваліфікованих фахівцях.

Закон України «Про наукову і науково-технічну діяльність» визначає правові, організаційні та фінансові засади функціонування і розвитку у сфері наукової і науково-технічної діяльності, створює умови для провадження наукової і науково-технічної діяльності, задоволення потреб суспільства і держави у технологічному розвитку шляхом взаємодії освіти, науки, бізнесу та влади.

Рівень розвитку науки і техніки є визначальним чинником прогресу суспільства, підвищення добробуту громадян, їх духовного та інтелектуального зростання. Цим зумовлена необхідність пріоритетної державної підтримки розвитку науки як джерела економічного зростання і невід'ємної складової національної культури та освіти, створення умов для реалізації інтелектуального потенціалу громадян у сфері наукової і науково-технічної діяльності, забезпечення використання досягнень вітчизняної та світової науки і техніки для задоволення соціальних, економічних, культурних та інших потреб.

Освіта – основа розвитку особистості, суспільства, нації та держави, запорука майбутнього України. Вона є визначальним чинником політичної, соціально-економічної, культурної та наукової життєдіяльності суспільства.

Освіта відтворює і нарощує інтелектуальний, духовний та економічний потенціал суспільства.

Освіта є стратегічним ресурсом поліпшення добробуту людей, забезпечення національних інтересів, зміцнення авторитету і конкурентоспроможності держави на міжнародній арені.

Водночас стан справ у галузі освіти, темпи та глибина перетворень не повною мірою задовольняють потреби особистості, суспільства і держави. Глобалізація, зміна технологій, перехід до постіндустріального, інформаційного суспільства, утвердження пріоритетів сталого розвитку, інші властиві сучасній цивілізації риси зумовлюють розвиток людини як головну мету, ключовий показник і основний важіль сучасного прогресу, потребу в радикальній модернізації галузі, ставлять перед державою, суспільством завдання забезпечити пріоритетність розвитку освіти і науки, першочерговість розв'язання їх нагальних проблем.

Актуальним завданням є забезпечення доступності здобуття якісної освіти протягом життя для всіх громадян та дальше утвердження її національного характеру. Мають постійно оновлюватися зміст освіти та організація навчально-виховного процесу відповідно до демократичних цінностей, ринкових засад економіки, сучасних науково-технічних досягнень. Критичним залишається стан фінансування освіти і науки, недостатнім є рівень оплати праці працівників освіти і науки.

3.2. Державні стандарти вищої освіти

Відповідно до пункту 7 частини першої статті 13 Закону України “Про вищу освіту” Кабінет Міністрів України Постановою від 29 квітня 2015 року за № 266 затвердив перелік галузей знань і спеціальностей, за якими здійснюється підготовка здобувачів вищої освіти в Україні. Дана постанова була чинної до 30 серпня 2024 р. В цей день була прийнята Постанова Кабінету Міністрів України «Про внесення змін до переліку галузей знань і спеціальностей, за якими здійснюється підготовка здобувачів вищої та фахової передвищої освіти» за № 1021, якою установлено, що здобувачі вищої освіти, які вступили до закладів

освіти для здобуття вищої до набрання чинності цією постановою (крім тих, що поновлюються), продовжують навчання відповідно до обраних галузей знань та спеціальностей. Поновлення здобувачів вищої освіти здійснюється на освітню програму за спеціальністю, за якою здійснюється підготовка здобувачів відповідного року набору

Таблицею відповідності Переліку галузей знань і спеціальностей, за якими здійснюється підготовка здобувачів вищої освіти, затвердженому постановою Кабінету Міністрів України від Х.Х.2023 № Х (Перелік 2023), Переліку галузей знань і спеціальностей, за якими здійснюється підготовка здобувачів вищої освіти, затвердженому постановою Кабінету Міністрів України від 06.11.2015 № 266 (Перелік 2015) визначається у який спосіб пов'язуються галузі за старим та новим регуляторним документом.

Для прикладу у випадку механіко-математичного факультету це має такий вигляд (табл. 4).

Табл. 4.

Таблиця відповідностей Переліку галузей знань і спеціальностей, за якими здійснюється підготовка здобувачів вищої освіти на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Перелік 2023				**Перелік 2015**	
Галузь знань		**Спеціальність**			
Шифр	**Найменування**	**Код**	**Найменування**	**Код та найменування спеціальності**	**Шифрі та назва галузі знань**
А	Освіта	А4	Середня освіта (за предметними спеціальностями)	014 Середня освіта (за предметними спеціальностями)	01 Освіта/ Педагогіка
Е	Природничі науки, математика та статистика	Е6	Математика	111 Математика	11 Математика та статистика

				113 Прикладна математика [в частині дослідження та розробки математичних методів, що застосовуються в науці, інженерії, бізнесі та промисловості]	11 Математика та статистика
		E7	Статистика	112 Статистика	11 Математика та статистика

Стандарт вищої освіти – це сукупність вимог до освітніх програм вищої освіти, які є спільними для всіх освітніх програм у межах певного рівня вищої освіти та спеціальності.

Затверджені стандарти вищої освіти можна знайти на офіційному сайті Міністерства освіти та науки України.

Стандарти вищої освіти розробляються:

- для кожного рівня вищої освіти в межах кожної спеціальності;
- відповідно до Національної рамки кваліфікацій (НРК).

Стандарти вищої освіти використовуються для:

- розроблення та вдосконалення освітніх програм закладами вищої освіти і науковими установами;
- визначення та оцінювання якості вищої освіти та результатів освітньої діяльності закладів вищої освіти (наукових установ) під час інституційної акредитації та акредитації освітніх програм;
- оцінювання результатів навчання за відповідними спеціальностями.

Стандарт вищої освіти визначає такі вимоги до освітньої програми:

1) обсяг кредитів ЄКТС, необхідний для здобуття відповідного ступеня вищої освіти;
2) вимоги до рівня освіти осіб, які можуть розпочати навчання за цією програмою, та результатів їх навчання;

3) перелік обов’язкових компетентностей випускника;
4) нормативний зміст підготовки здобувачів вищої освіти, сформульований у термінах результатів навчання;
5) форми атестації здобувачів вищої освіти;
6) вимоги до створення освітніх програм підготовки за галуззю знань, двома галузями знань або групою спеціальностей (у стандартах рівня молодшого бакалавра), міждисциплінарних освітньо-наукових програм (у стандартах магістра та доктора філософії);
7) вимоги професійних стандартів (за їх наявності).

Стандарти вищої освіти спеціальностей, необхідних для доступу до професій, для яких запроваджене додаткове регулювання, можуть містити додаткові вимоги до правил прийому, структури освітньої програми, змісту освіти, організації освітнього процесу та атестації випускників. Нормативний зміст підготовки здобувачів вищої освіти для відповідних освітніх програм формується у термінах програмних результатів навчання.

Заклад вищої освіти або наукова установа може самостійно запроваджувати спеціалізації, що зазначаються при присудженні освітньої кваліфікації особам, які успішно закінчили навчання за відповідними освітніми програмами.

Стандарти вищої освіти не встановлюють рекомендованих (примірних тощо) переліків можливих спеціалізацій, окрім випадків, передбачених законодавством. Стандарти встановлюють вимоги, що є спільними для всіх спеціалізацій в межах відповідної спеціальності. Заклади вищої освіти при розробленні освітніх програм можуть встановлювати додаткові вимоги до компетентностей, результатів навчання та форм атестації, які відображають потреби конкретних спеціалізацій. Заклади вищої освіти мають право використовувати власні формулювання спеціальних (фахових) компетентностей і результатів навчання, забезпечуючи при цьому, щоб сукупність вимог освітньої програми повністю охоплювала всі вимоги стандарту.

Стандарти вищої освіти за кожною спеціальністю розробляє центральний орган виконавчої влади у сфері освіти і науки з урахуванням пропозицій галузевих державних органів, до сфери управління яких належать заклади вищої

освіти, і галузевих об’єднань організацій роботодавців та затверджує їх за погодженням із Національним агентством із забезпечення якості вищої освіти.

Стандарти базуються на компетентнісному підході та поділяють філософію (принципи і цінності) Європейського простору вищої освіти, визначену в комюніке Болонського процесу (Додаток) та в міжнародному Проекті Європейської Комісії «Гармонізація освітніх структур в Європі» (Tuning Educational Structures in Europe, TUNING).

Відповідно до вимог абзацу першого частини шостої статті 13 Закону України «Про вищу освіту» Науково-методична рада (НМР) Міністерства освіти і науки України (МОН) за участю Національного агентства із забезпечення якості вищої освіти (НАЗЯВО) розробляє методологію, методичні рекомендації щодо розроблення стандартів вищої освіти, а науково-методичні комісії (НМК) здійснюють розроблення цих стандартів.

Список рекомендованої літератури

1. Байлов А.В., Литвин О.М., Чумак В.В. Науково-дослідницька діяльність студентів, курсантів, слухачів, аспірантів, ад'юнктів та докторантів: довідник молодого вченого / за заг. ред. О.М.Головка. Харків: ХНУВС : Тім Пабліш Груп, 2016. 363 с.
2. Бірта Г. О. Методологія і організація наукових досліджень. Навч.посіб. К. : «Центр учбової літератури», 2014. 142 с. URI:https://shron1.chtyvo.org.ua/Burhu_Yurii/Metodolohiia_i_orhanizatsiia_naukov ykh_doslidzhen.pdf
3. Вітвицька С. Основи педагогіки вищої школи: підручник за модульно-рейтинговою системою навчання для студентів магістратури. К.: Центр навчальної літератури, 2006. 384с.
4. Гладуш В. А. Лисенко Г.І. Педагогіка вищої школи: теорія, практика, історія. навч. посіб. 2014. 416 с.
5. Грабченко А.І., Федорович В.О., Гаращенко Я.М. Методи наукових досліджень: Навч. посібник. – Х.: НТУ "ХПІ", 2009. – 142 с.
6. Данильян О.Г., Дзьобань. О.П., Організація та методологія наукових досліджень: навч. посіб. Харків : Право, 2017. 446 с. URI: URL:https://dut.edu.ua/uploads/l_2032_60626625.pdf
7. Конверський А. Є. Основи методології та організації наукових досліджень: Навч. посіб. для студентів, курсантів, аспірантів і ад'юнтів. — К.: Центр учбової літератури, 2010. — 352 с.
8. Костриченко В.М. Університетська освіта: Навч. посібник. Рівне: НУВГП, 2010. 94с. URI: https://ep3.nuwm.edu.ua/2111/
9. Крушельницька О.В. Методологія та організація наукових досліджень: Навчальний посібник. – К.: Кондор, 2006. – 206 с.
10. Юринець В. Є. Методологія наукових досліджень : навч. посібник – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2011. – 178 с.
11. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів: 5-те вид. Навч. посіб. К.: Центр учбової літератури, 2010. 448 с.

12. Математика в технічному університеті: Підручник / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова; за ред. О. І. Клесова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. Т. 1. 496 с.
13. Математика в технічному університеті: Підручник / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова; за ред. О. І. Клесова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. Т. 2. 504 с.
14. Математика в технічному університеті : Підручник / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова; за ред. О. І. Клесова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. Т. 3. 454 с.
15. Методика та організація наукових досліджень: Навч. посіб. С. Е. Важинський, Т І. Щербак. – Суми: СумДПУ імені А. С. Макаренка, 2016. 260 с. URI: http://libnet.com/book/118_Metodika_ta_organizaciya_naykovih_doslidjen_.html
16. Барабаш О.В., Мусієнко А.П., Собчук В.В. Вища математика для економістів. Конспект лекцій. Частина 1. К.2019. 224 с

Інформаційні та навчальні ресурси в Інтернеті:

1. Національна бібліотека України ім. В. І. Вернадського. URL:http://www.nbuv.gov.ua
2. ДНУ «Український інститут науково-технічної експертизи та інформації» (УкрІНТЕІ). URL: http://www.uintei.kiev.ua
3. ДУ «Інститут досліджень науково-технічного потенціалу та історії науки Г.М. Доброва НАН України» URL: https://stepscenter.org.ua/

Нормативно-правові документи:

1. Конституція України № 254к/96-ВР від 28.06.1996 року // Відомості Верховної Ради України, 1996, № 30, ст. 141
2. Закон України "Про вищу освіту" №2984-III, із змінами від 19 січня 2010 р.

3. Наказ МОН України. Про запровадження у вищих навчальних закладах України Європейської кредитно-трансферної системи № 943 від 16 жовтня 2009 р.
4. РОЗПОРЯДЖЕННЯ КМУ від 15 травня 2013 р. № 386-р Про схвалення Стратегії розвитку інформаційного суспільства в Україні.

Додаток А

Зразок плану-конспекту лекції з вищої математики

Методика вивчення диференціального числення функцій багатьох змінних

Тема: Границі та неперервність функцій кількох змінних. Частинні похідні. Диференціювання складної функції. Похідні за напрямком.

Мета заняття:

Сформувати у студентів розуміння основних понять теорії функцій кількох змінних, зокрема: поняття границі та неперервності функцій кількох змінних; поняття частинної похідної функції кількох змінних, частинних похідних другого та вищого порядку; поняття диференційованості функції кількох змінних; поняття похідної за напрямком та градієнта функції.

Навчити студентів досліджувати функції кількох змінних на існування границі та неперервність; обчислювати частинні похідні першого та вищих порядків; знаходити похідну функції за заданим напрямком; визначати градієнт функції та розуміти його геометричний зміст.

Забезпечити засвоєння студентами основних методів та алгоритмів розв'язання типових задач з даної теми.

Розвивати логічне мислення студентів при аналізі та дослідженні властивостей функцій кількох змінних, *сприяти* розвитку абстрактного мислення через узагальнення понять диференціального числення однієї змінної на випадок кількох змінних, *розвивати* вміння встановлювати зв'язки між теоретичним матеріалом та його можливими застосуваннями в інших галузях знань.

Виховувати у студентів розуміння важливості математичних знань для подальшого вивчення фахових дисциплін та практичної діяльності, *сприяти* розвитку культури математичного мислення та точності формулювань, *прищеплювати* інтерес до поглибленого вивчення математики та її застосувань.

Вид заняття: лекція.

Тривалість: 90 хвилин.

Технічні засоби навчання: ноутбук, проектор.

Основні питання лекції:

1. Границі та неперервність функцій кількох змінних

1.1. Границі функцій двох змінних

1.2. Неперервність

1.3. Функції більш ніж двох змінних

2. Частинні похідні

2.1. Частинні похідні функції двох змінних

2.2. Функції більш ніж двох змінних

2.3. Частинні похідні та неперервність

2.4. Частинні похідні другого порядку

2.5. Теорема про мішані похідні

2.6. Частинні похідні вищих порядків

2.7. Диференційованість

3. Диференціювання складної функції

3.1. Функції двох змінних

3.2. Функції трьох змінних

3.3. Функції двох незалежних змінних

3.4. Похідна неявно заданої функції

3.5. Функції багатьох змінних

Похідні за напрямком

4.1. Похідні за напрямком на площині

4.2. Обчислення похідних за напрямком та градієнти

Ключові терміни і поняття: границі та неперервність функцій кількох змінних; частинні похідні 1-го, 2-го та вищих порядків; диференційованість та неперервність функцій кількох змінних; похідна складної функції кількох змінних; похідна неявної функції кількох змінних; градієнт функції; похідна за напрямком

Рекомендована література:

1. Заболоцький М.В., Сторож О.Г., Тарасюк С.В. Математичний аналіз. Київ: Знання, 2008.

2. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. У 2-х ч.ч. – Ч. 2. – К.: Либідь, 1993.
3. Збірник задач з математичного аналізу. Функції кількох змінних. М.О. Денисьєвський, А.В. Чайковський. – К.: ВПЦ “Київський університет”, 2012. – 176 с.
4. Дороговцев А.Я., Денисьєвський М.О., Кукуш О.Г. Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко-математичного факультету (перший семестр другого курсу, частина 1). – К.: ВПЦ «Київський університет», 2006.
5. Дороговцев А.Я., Денисьєвський М.О., Кукуш О.Г., Чайковський А.В. Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко-математичного факультету (перший семестр другого курсу, частина 2). – К.: ВПЦ «Київський університет», 2004.
6. Дороговцев А.Я., Денисьєвський М.О., Кукуш О.Г., Чайковський А.В. Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко-математичного факультету (другий семестр другого курсу). – К.: ВПЦ «Київський університет», 2006.
7. Математика в технічному університеті : Підручник / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова ; за ред. О. І. Клесова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. — Т. 2. — 504 с.

Хід заняття:

1. Організаційна частина заняття. (*2-3 хв*)

Початок заняття: вітання, короткий мотиваційний вступ.

2. Оголошення теми, мети та основних питань, які будуть розглянуті на лекції, переліку рекомендованої літератури. (*3-5 хв*)

3. Виклад нового матеріалу.

1. Границі та неперервність функцій кількох змінних (*18-22 хв*)

Ідеї границі та неперервності функцій кількох змінних аналогічні до відповідних ідей у випадку змінних однієї функції, але додавання незалежних

змінних призводить до додаткової складності та важливих відмінностей, які потребують нових ідей.

1.1. Границі функцій двох змінних

Якщо значення функції $f(x,y)$ лежать як завгодно близько до фіксованого дійсного числа L для всіх точок (x,y), достатньо близьких до точки (x_0,y_0), ми говоримо, що f наближається до границі L, коли (x,y) наближається до (x_0,y_0). Однак зауважимо, що якщо (x_0,y_0) лежить всередині області визначення f, (x,y) може наближатися до (x_0,y_0) різними шляхами. Щоб границя існувала, має бути отримано одне й те саме граничне значення для будь-якого шляху наближення.

Означення. Ми кажемо, що функція $f(x,y)$ наближається до **границі** L, коли (x,y) наближається до (x_0,y_0) і пишемо

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L,$$

якщо для будь-якого числа $\epsilon > 0$ існує відповідне число $\delta > 0$ таке, що для всіх (x,y) з області визначення f маємо, що $|f(x,y) - L| < \epsilon$ коли

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta.$$

Визначення границі каже, що відстань між $f(x,y)$ та L стає як завгодно малою, коли відстань між (x,y) та (x_0,y_0) робиться достатньо малою (але ненульовою).

Як і у випадку функцій однієї змінної, можна виконувати арифметичні дії над границями.

Властивості границь функцій двох змінних. Виконуються наступні правила, якщо L, M та k – дійсні числа, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ та $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$:

Правило суми/різниці: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) \pm g(x,y)) = L \pm M$

Множення на константу: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} kf(x,y) = kL$

Правило добутку: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y)g(x,y)) = LM$

Правило частки: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}, M \neq 0$

Правило піднесення до степеня: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f(x,y))^n = L^n, n>0, n\in Z$

Правило взяття кореня: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\sqrt[n]{f(x,y)} = L^{\frac{1}{n}}, n>0, n\in Z$

Наслідком цієї теореми є той факт, що ми можемо легко знаходити границі поліноміальних та раціональних функцій у точці (x_0, y_0), просто обчислюючи значення функцій в (x_0, y_0). Але у випадку раціональних функцій точка (x_0, y_0) має бути у їхній області визначення.

Приклад 1.

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{x-xy+3}{x^2y+5xy-y^3} = \frac{0-0\cdot 1+3}{0^2\cdot 1+5\cdot 0\cdot 1-1^3} = -3$$

$$\lim_{(x,y)\to(3,-4)}\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$$

Інколи треба виконати певні дії, перш ніж використовувати правила.

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

Ми не можемо використовувати правило частки, оскільки знаменник прямує до нуля. Але можна зробити деякі перетворення. Домножимо чисельник і знаменник на $\sqrt{x}+\sqrt{y}$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2-xy)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x(\sqrt{x}+\sqrt{y})$$

$$= 0\cdot\left(\sqrt{0}+\sqrt{0}\right) = 0$$

Ми скоротили на $y-x$, тому що шлях $y=x$ не знаходиться в області визначення функції.

Тепер знайдемо ліміт, використовуючи означення.

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^2}{x^2+y^2}$.

Помітимо, що коли $x = 0$ і $y \neq 0$ границя дорівнює нулю. Аналогічно для випадку $x \neq 0$ і $y = 0$. Отже, якщо границя існує, то її значення має дорівнювати нулю. Доведемо, що границя дійсно дорівнює нулю.

Нехай задане довільне $\epsilon > 0$. Нам потрібно знайти таке $\delta > 0$, що $\left|\frac{4xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| < \epsilon$ коли $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$.

Тобто $\frac{4|x|y^2}{x^2+y^2} < \epsilon$ коли $< \sqrt{x^2+y^2} < \delta$.

Оскільки $y^2 \leq x^2 + y^2$, то $\frac{4|x|y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{4|x|(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 4|x| = 4\sqrt{x^2} \leq 4\sqrt{x^2+y^2} < 4\delta$.

Тобто нам достатньо взяти $4\delta = \epsilon$ або $\delta = \frac{\epsilon}{4}$.

Інколи можна довести, що границі не існує, показавши, що отримуються різні границі при різному шляху підходу.

Приклад 4. Показати, що $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ не існує.

Вздовж шляху $y = x$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2}{x^2+x^2} = 2.$

Вздовж шляху $y = 2x$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x\cdot 2x}{x^2+(2x)^2} = \frac{2}{5}.$

Оскільки границі не рівні, то границі не існує.

Однак цей метод не працює в іншу сторону: існування однієї й тієї ж границі вздовж деякого набору шляхів ще не гарантує існування границі.

1.2. Неперервність

Як і у випадку функцій однієї змінної, неперервність визначається в термінах границь.

Означення. Функція $f(x,y)$ **неперервна у точці** (x_0, y_0) якщо f визначена у (x_0, y_0), $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ існує та $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

Функція неперервна, якщо вона неперервна в кожній точці області визначення.

З цього визначення а також з правил знаходження границь випливає, що алгебраїчні комбінації неперервних функцій є неперервними. Це означає, що сума, різниця, добуток неперервних функцій є неперервними. Зокрема, поліноміальні та раціональні функції є неперервними в кожній точці, де вони визначені.

Приклад 5. Функція $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$ неперервна у кожній точці $(x,y) \neq (0,0)$, тому що вона раціональна і можна знайти граничне значення просто підставивши відповідні значення.

Але вона не є неперервною у точці $(0,0)$, оскільки хоча вона й визначена там, але, як було показано вище, границі в точці $(0,0)$ не існує.

1.3. Функції більш ніж двох змінних

Означення границі та неперервності (а також їх властивості) для функцій двох змінних можна поширити на функції трьох і більше змінних. Функції типу $\ln(x+y+z)$ та $\frac{y \sin(z)}{x-1}$ є неперервними у своїй області визначення, а ліміти типу $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,0,-1)} \frac{e^{x+z}}{z^2+\cos(\sqrt{xy})} = \frac{e^{1-1}}{(-1)^2+\cos(0)} = \frac{1}{2}$ можуть бути знайдені прямою підстановкою.

2. Частинні похідні (*22-26 хв*)

Диференціальне числення функцій кількох змінних подібне до диференціального числення функцій однієї змінної, якщо застосовувати його до кількох змінних по черзі. Коли ми вважаємо всі незалежні змінні функції окрім однієї постійними і диференціюємо по цій змінній, ми отримуємо «частинну» похідну. Далі буде показано як частинні похідні визначаються та як їх обчислити, застосовуючи правила диференціювання функцій однієї змінної. Ідея диференційованості функцій кількох змінних вимагає більше ніж існування частинних похідних, оскільки до точки можна підійти з багатьох різних сторін.

Однак, диференційовані функції кількох змінних поводяться так само, як диференційовані функції однієї змінної, тому вони неперервні і може бути добре апроксимовані лінійними функціями.

2.1. Частинні похідні функції двох змінних

Якщо (x_0, y_0) – точка з області визначення функції $f(x, y)$, то площина $y = y_0$ перетне графік функції $z = f(x, y)$ по кривій $z = f(x, y_0)$. У цьому випадку функція $z = f(x, y_0)$ у площині $y = y_0$ стає функцією однієї змінної.

Частинна похідна функції f за змінною x в точці (x_0, y_0) – проста похідна функції $f(x, y_0)$ за змінною x у точці $x = x_0$. Для частинних похідних використовується символ ∂.

Означення. Частинна похідна функції $f(x, y)$ за змінною x в точці (x_0, y_0) визначається як

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

при умові що ця границя існує.

Є декілька позначень для частинної похідної, серед яких наступні: $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,y_0)}$, $f_x(x_0, y_0)$, $\frac{d}{dx} f(x, y_0)|_{x=x_0}$.

Означення частинної похідної функції f за змінною y в точці (x_0, y_0) подібне до визначення частинної похідної за змінною x. Зафіксуємо x у значенні x_0 та візьмемо похідну за змінною y в точці $y = y_0$.

Означення. Частинна похідна функції $f(x, y)$ за змінною y в точці (x_0, y_0) визначається як

$$\frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h},$$

при умові що ця границя існує.

Означення $\frac{\partial f}{\partial x}$ та $\frac{\partial f}{\partial y}$ дають нам два різні шляхи диференціювання функції $f(x, y)$ у точці: за змінною x (вважаючи y константою) або за змінною x

(вважаючи x константою). Зазвичай значення цих похідних в точці (x_0, y_0) не співпадають.

Приклад 6. Знайти значення $\frac{\partial f}{\partial x}$ та $\frac{\partial f}{\partial y}$ у точці $(4,5)$, якщо $f(x,y) = x^2 + 3xy + y - 1$.

Щоб знайти $\frac{\partial f}{\partial x}$, зафіксуємо y та продиференціюємо по x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy + y - 1) = \frac{\partial}{\partial x}x^2 + 3y\frac{\partial}{\partial x}x + y\frac{\partial}{\partial x}1 - \frac{\partial}{\partial x}1 = 2x + 3y$$

Значення $\frac{\partial f}{\partial x}$ у точці $(4,5)$ дорівнює $2 \cdot 4 + 3 \cdot (-5) = -7$.

Щоб знайти $\frac{\partial f}{\partial y}$, зафіксуємо x та продиференціюємо по y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3xy + y - 1) = x^2\frac{\partial}{\partial y}1 + 3x\frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial y}y - \frac{\partial}{\partial y}1 = 3x + 1$$

Значення $\frac{\partial f}{\partial y}$ у точці $(4,5)$ дорівнює $3 \cdot 4 + 1 = 13$.

Приклад 7. Знайти f_y, якщо $f(x,y) = y\sin(xy)$.

Зафіксуємо x та продиференціюємо по y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y\sin(xy)) = y\frac{\partial}{\partial y}\sin(xy) + \sin(xy)\frac{\partial}{\partial y}y$$

$$= y\cos(xy)\frac{\partial}{\partial y}(xy) + \sin(xy) = xy\cos(xy) + \sin(xy)$$

Похідна неявно заданоъ функції шукається так само, як і у випадку однієї змінної.

Приклад 8. Знайти z_x, якщо $yz - \ln(z) = x + y$. z – функція двох змінних x та y.

Продиференціюємо обидві сторони рівняння за x, фіксуючи y та вважаючи z функцією від x:

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz - \ln(z)) = \frac{\partial}{\partial x}(x + y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}yz - \frac{\partial}{\partial x}\ln(z) = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial x}y$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(y - \frac{1}{z}\right) = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{zy - 1}$$

2.2. Функції більш ніж двох змінних

Означення частинних похідних для функцій більш ніж двох змінних дуже схоже на означення частинної похідної, даної вище. Вони є нічим іншим як похідною за однією змінною (всі інші змінні вважаємо константами).

Приклад 9. Знайти $\frac{\partial f}{\partial z}$, якщо $f(x, y, z) = x\sin(y + 3z)$.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x\sin(y + 3z)) = x\frac{\partial}{\partial z}(\sin(y + 3z)) = x\cos(y + 3z)\frac{\partial}{\partial z}(y + 3z)$$

$$= x\cos(y + 3z)\left(y\frac{\partial}{\partial z}1 + 3\frac{\partial}{\partial z}z\right) = 3x\cos(y + 3z)$$

2.3. Частинні похідні та неперервність

Питання до аудиторії. Чи випливає з існування частинних похідних неперервність функції?

Функція $f(x, y)$ може мати частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x}$ та $\frac{\partial f}{\partial y}$ в деякій точці, і при цьому не бути неперервною в цій точці. В цьому полягає відмінність від функцій однієї змінної (там з диференційованості функції випливає її неперервність). Однак, якщо всі частинні похідні існують і неперервні на диску з центром (x_0, y_0), то f неперервна в точці (x_0, y_0).

Приклад 10. Нехай $f(x,y)=\begin{cases}0, xy\neq 0\\ 1, xy=0\end{cases}$. Показати, що у цієї функції існують частинні похідні в точці $(0,0)$, але вона не є неперервною в цій точці.

Знайдемо границю вздовж лінії $y=x$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)|_{y=x}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0=0$$

Оскільки $f(0,0)=1\neq \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, то функція не є неперервною в $(0,0)$.

Щоб знайти $\frac{\partial f}{\partial x}$ в точці $(0,0)$ зафіксуємо y в $y=0$. У цьому випадку $f(x,0)=1$ для всіх x і $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)}=0$. Аналогічно $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,0)}=0$.

Незважаючи на цей приклад, з диференційованості функції може випливати її неперервність навіть для функцій кількох змінних. Але щоб це було правдою, потрібна сильніша вимога для диференційованості функцій кількох змінних, ніж просто існування частинних похідних.

2.4. Частинні похідні другого порядку

Коли ми диференціюємо функцію $f(x,y)$ двічі, ми знаходимо її похідні другого порядку. Вони можуть позначатися по-різному: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ або f_{xx}, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ або f_{yy}, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ або f_{xy}, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ або f_{yx}.

За означенням $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ або $f_{xx}=(f_x)_x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ або $f_{xy}=(f_x)_y$ (диференціювання за змінною x а потім за змінною y).

Приклад 11. Якщо $f(x,y)=x\cos(y)+ye^x$, знайти частинні похідні другого порядку.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x\cos(y)+ye^x)=\cos(y)+ye^x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x\cos(y)+ye^x)=-x\sin(y)+e^x$$

Тепер знайдемо похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\cos(y) + ye^x) = ye^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(\cos(y) + ye^x) = -\sin(y) + e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-x\sin(y) + e^x) = -\sin(y) + e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-x\sin(y) + e^x) = -x\cos(y)$$

2.5. Теорема про мішані похідні

З останнього прикладу можна помітити, що «мішані» похідні $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ та $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ рівні. Це не випадковість. Вони мають бути рівними, коли функція, всі частинні похідні першого порядку та мішані похідні неперевні.

Теорема про мішані похідні (теорема Шварца/Клеро/Янга). Якщо функція $f(x, y)$ та її частинні похідні f_x, f_y, f_{xy} та f_{yx} визначені на відкритому інтервалі, що містить точку (a, b) та неперервні в точці (a, b), то $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

Ця теорема стверджує, що для того, щоб знайти мішані похідні другого порядку, ми можемо диференціювати у будь-якому порядку, при умові, що задовольняються умови неперервності. Це інколи спрощує обчислення.

Приклад 12. Знайти $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$, якщо $w = xy + \frac{e^y}{y^2+1}$.

Символ $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ каже, що треба продиференціювати спочатку по y, а потім по x. Але диференціювання спочатку по y доволі кропітке. Тому використаємо теорему Клеро (її умови виконуються):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(y) = 1$$

2.6. Частинні похідні вищих порядків

До цього ми розбирали частинні похідні перших та других порядків, оскільки вони найчастіше з'являються у прикладних проблемах. Але, власне кажучи, немає обмеження на те, скільки ми можемо диференціювати функцію (при умові, що виникаючі похідні існують). Таким чином ми можемо отримати похідні 3-го та 4-го порядків: $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = f_{xyy}$, $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = f_{xxyy}$.

Так само як і у випадку другого порядку, мішані похідні рівні (тобто ми можемо диференціювати у будь-якому порядку), при умові, що всі похідні, задіяні у процесі, неперервні.

Приклад 13. Знайти f_{yxyz}, якщо $f(x, y, z) = 1 - 2xy^2z + x^2y$.

$$f_y = -4xyz + x^2$$

$$f_{yx} = -4yz + 2x$$

$$f_{yxy} = -4z$$

$$f_{yxyz} = -4$$

2.7. Диференційованість

Поняття диференційованості для функцій кількох змінних є більш складним, ніж для функцій однієї змінної, оскільки до точки в області визначення можна підійти різними шляхами. Визначаючи частинні похідні для функції двох змінних, ми перетинали графік вертикальними площинами, паралельними площинам xz та yz, утворюючи криву на кожній площині, яка називається слідом. Частинні похідні можна розглядати як нахили дотичних ліній до цих слідів у точці на поверхні, що відповідає точці (x_0, y_0). Для диференційованої

функції здавалося б природнім припустити, що якби ми трохи повернули одну з цих вертикальних площин, зберігаючи її вертикальною, але більше не паралельною її координатній площині, тоді гладкий слід на цій площині мав б дотичну, що має нахил, який трохи відрізняється від того, що був раніше (коли площина була паралельна її координатній площині). Проте просто існування частинної похідної не гарантує такого результату. Наприклад, поверхня може

мати «тріщину» в напрямку нової площини, тому слід навіть не є неперервним в (x_0, y_0), не кажучи вже про наявність дотичної лінії у відповідній точці кривої. Як існування границь в напрямках x- та y-координат не гарантують, що сама функція має границю в (x_0, y_0), так само недостатньо існування обох частинних похідних, щоб забезпечити існування похідних для слідів в інших вертикальних площинах. Для існування диференційованості необхідна властивість, яка гарантує відсутність різких змін у функції в результаті невеликих змін незалежних змінних уздовж будь-якого шляху, що наближається до (x_0, y_0), шляхів, уздовж яких обидві змінні x та y можуть змінюватися, а не лише одна із них за раз.

З курсу вивчення функцій однієї змінної відомо, що якщо функція $y = f(x)$ є диференційованою в точцы $x = x_0$, то приріст Δy, що є результатом зміни x з x_0 до $x_0 + \Delta x$, близький до приросту ΔL вздовж дотичної:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \epsilon\Delta x,$$

де $\epsilon \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Подібне означення можна дати і для диференційованості функцій двох змінних.

Означення. Функція $z = f(x, y)$ ***диференційована*** у точці (x_0, y_0), якщо існують $z_x(x_0, y_0)$ і $z_y(x_0, y_0)$, а також Δz задовольняє наступне рівняння:

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y,$$

де кожен ϵ_1 та ϵ_2 прямують до нуля, коли обидва Δx та Δy прямують до нуля.

f називається **диференційованою**, якщо вона диференційована в кожній точці своєї області визначення.

Наслідок наступної теореми пов'язує диференційованість функції з неперервністю її частинних похідних.

Теорема приросту для функцій двох змінних. Нехай частинні похідні першого порядку f_x та f_y функції $f(x, y)$ визначені на відкритому регіоні $\mathbb{R}$, що містить

точку (x_0, y_0) та неперевні в (x_0, y_0). Тоді зміна $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta_y) - f(x_0, y_0)$ в $\mathbb{R}$ задовольняє наступне рівняння:

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$

де кожен ϵ_1 та ϵ_2 прямують до нуля, коли обидва Δx та Δy прямують до нуля.

З цієї теореми маємо такий наслідок.

Наслідок теореми приросту для функцій двох змінних. Якщо частинні похідні першого порядку f_x та f_y функції $f(x, y)$ неперервні на відкритому регіоні $\mathbb{R}$, тоді f диференційована в кожній точці з $\mathbb{R}$.

Якщо $z = f(x, y)$ диференційована, то звідси слідує, що $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta_y) - f(x_0, y_0)$ прямує до нуля, коли обидва Δx та Δy прямують до нуля. Це нам каже про те, що функція неперервна в кожній точці, де вона диференційована.

З диференційованості слідує неперервність. Якщо функція диференційована в точці (x_0, y_0), то вона неперервна в (x_0, y_0).

3. Диференціювання складної функції (*18-22 хв*)

Правило диференціювання складної функції (ланцюгове правило) однієї змінної каже нам, що якщо функція $w = f(x)$ є диференційованою функцію по x та $x = g(t)$ є диференційованою функцією по t, то w – диференційована функція від t та $\frac{dw}{dt}$ можна знайти за наступною формулою:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Для цієї складної функції $w(t) = f(g(t))$ ми можемо вважати t незалежною змінною а $x = g(t)$ «проміжною змінною», оскільки t визначає значення x, яке в свою чергу дає значення w з функції f.

Для функцій кількох змінних ланцюгове правило має більше однієї форми, яка залежить від того, скільки незалежних і проміжних змінних задіяно. Однак, як тільки визначено тип кожної змінної, ланцюгове правило працює так само.

3.1. Функції двох змінних

Ланцюгове правило для диференційованої функції $w = f(x, y)$, коли $x = x(t)$ та $y = y(t)$ – обидві диференційовані функції по t, дається наступною теоремою.

Диференціювання складної функції однієї незалежної змінної та двох проміжних змінних. Якщо $w = f(x, y)$ – диференційована, $x = x(t)$ та $y = y(t)$ – обидві диференційовані по t функції, тоді складна функція $w = f\big(x(t), y(t)\big)$ диференційована по t і

$$\frac{dw}{dt} = f_x\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + f_y\big(x(t), y(t)\big)y'(t)$$

або

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Оскільки $w = f(x, y)$, то можна написати вище зазначене ланцюгове правило у наступній формі:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Однак значення залежної змінної w різне в різних частинах рівняння. В лівій частині w – складна функція $f\big(x(t), y(t)\big)$ однієї змінної t. Справа ж – це функція двох змінних x та y.

Приклад 14. Використовуючи ланцюгове правило знайти похідну $w = xy$ за змінною t вздовж шляху $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$. Яке значення похідної у точці $t = \frac{\pi}{2}$?

Застосуємо правило диференціювання складної функції:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}(xy)\frac{d}{dt}(\cos(t)) + \frac{\partial}{\partial y}(xy)\frac{d}{dt}(\sin(t))$$

$$= y(-\sin(t)) + x\cos(t) = \sin(t)\,(-\sin(t)) + \cos(t)\cos(t)$$

$$= \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t)$$

$$\frac{dw}{dt}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

3.2. Функції трьох змінних

Ланцюгове правило тут подібне до правила для функцій двох змінних.

Диференціювання складної функції однієї незалежної змінної та трьох проміжних змінних. Якщо $w = f(x, y, z)$ – диференційована, $x = x(t)$, $y = y(t)$ та $z = z(t)$ – усі диференційовані по t функції, тоді складна функція $w = f(x(t), y(t), z(t))$ диференційована по t і

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Приклад 15. Використовуючи ланцюгове правило знайти похідну $w = xy + z$ за змінною t вздовж шляху $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $z = t$. Яке значення похідної у точці $t = 0$?

Застосуємо правило диференціювання складної функції:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(xy + z)\frac{d}{dt}(\cos(t)) + \frac{\partial}{\partial y}(xy + z)\frac{d}{dt}(\sin(t))$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(xy + z)\frac{d}{dt}(t) = y(-\sin(t)) + x\cos(t) + 1\cdot 1 = \cos(2t) + 1$$

$$\frac{dw}{dt}\Big|_{t=0} = \cos(2\cdot 0) + 1 = 2$$

3.3. Функції двох незалежних змінних

Розглянемо тепер випадок, коли замість однієї незалежної змінної t у нас дві незалежні змінні r та s.

Диференціювання складної функції двох незалежних змінних та трьох проміжних змінних. Якщо $w = f(x, y, z)$, $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$ та $z = k(r, s)$ – диференційовані функції, тоді w має частинні похідні по r та по s, які задаються наступними формулами:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

Приклад 16. Знайти $\frac{\partial w}{\partial r}$ та $\frac{\partial w}{\partial s}$, якщо $w = x + 2y + z^2$, $x = \frac{r}{s}$, $y = r^2 + \ln(s)$, $z = 2r$.

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} = 1 \cdot \frac{1}{s} + 2 \cdot 2r + 2z \cdot 2 = \frac{1}{s} + 4r + 8r = 12r + \frac{1}{s}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = 1 \cdot \left(-\frac{r}{s^2}\right) + 2 \cdot \frac{1}{s} + 2z \cdot 0 = \frac{2}{s} - \frac{r}{s^2}$$

При збільшенні/зменшені числа проміжних змінних збільшується/зменшується число доданків.

3.4. Похідна неявно заданої функції

Нехай функція $F(x, y)$ є диференційованою та рівняння $F(x, y) = 0$ неявно задає y як диференційовану функцію по x, наприклад, $y = h(x)$.

Оскільки $w = F(x, y) = 0$, то похідна $\frac{dw}{dx}$ також рівна нулю.

Отже,

$$0 = \frac{dw}{dx} = F_x\frac{dx}{dx} + F_y\frac{dy}{dx} = F_x + F_y\frac{dy}{dx}$$

Якщо $F_y \neq 0$, то $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$.

Формула похідної для неявно заданої функції. Нехай функція $F(x,y)$ є диференційованою та рівняння $F(x,y)=0$ неявно задає y як диференційовану функцію по x. Тоді в будь якій точці, де $F_y \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Приклад 17. Знайти $\frac{dy}{dx}$, якщо $y^2 - x^2 - \sin(xy) = 0$.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-2x - y\cos(xy)}{2y - x\cos(xy)} = \frac{2x + y\cos(xy)}{2y - x\cos(xy)}$$

Аналогічний результат можна отримати і для функції трьох змінних. Нехай рівняння $F(x,y,z)=0$ неявно задає z як диференційовану функцію по x та y – $z = f(x,y)$. Вважаючи F та f диференційованими, маємо, що

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = F_x + F_y \cdot 0 + F_z\frac{\partial z}{\partial x} \to \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

Аналогічно

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

3.5. Функції багатьох змінних

Ми уже бачили кілька різних форм ланцюгового правила (правила диференціювання складної функції), але кожна з них є частинним випадком однієї загальної формули.

В загальному випадку, нехай $w = f(x,y,\dots,v)$ – диференційована функція за проміжними змінними $x,y,\dots,v$ (скінченна множина), а $x,y,\dots,v$ – диференційовані функції за незалежними змінними $p,q,\dots,t$ (також скінченна множина). Тоді w – диференційована функція за змінними від p до t, і частинні похідні за цими змінними мають наступну форму:

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p} + \dots + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p}$$

Інші рівняння можна отримати міняючи по черзі p на $q, \dots t$.

Одним зі способів запам'ятовування цього рівняння є представлення правої частини як скалярного добутку векторів з компонентами $\underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \dots, \frac{\partial w}{\partial v}\right)}_{\text{похідні по } w \text{ за проміжними змінними}}$ та $\underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial p}, \frac{\partial y}{\partial p}, \dots, \frac{\partial v}{\partial p}\right)}_{\text{похідні проміжних змінних по вибраній незалежній змінній}}$.

4. Похідні за напрямком (*14-18 хв*)

Для функцій кількох змінних можна ввести поняття похідної за напрямком, тобто визначити зміну функції у напрямку заданого вектора.

4.1. Похідні за напрямком на площині

Ми знаємо, що якщо $f(x, y)$ – диференційована функція, то швидкість з якою f змінюється за t вздовж диференційованої кривої $x = g(t)$, $y = h(t)$ задається наступним рівнянням:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

В будь-якій точці $P_0 = (x_0, y_0) = P_0\big(g(t_0), h(t_0)\big)$ це рівняння задає швидкість зміни f за t, а тому залежить від напрямку руху вздовж кривої. Якщо крива – пряма лінія, а t – параметр довжини вздовж лінії яка починається в P_0, а її напрямок співпадає з одиничним вектором $\vec{u}$, тоді $\frac{df}{dt}$ – швидкість зміни f за відстанню в її області визначення в напрямку вектора $\vec{u}$. Змінюючи $\vec{u}$, ми зможемо знайти швидкості зміни f за відстанню, рухаючись через P_0 у різних напрямках.

Опишемо це формально. Нехай $f(x, y)$ визначена в регіоні $\mathbb{R}$ в площині xy і нехай $P_0 = (x_0, y_0)$ – точка з $\mathbb{R}$. Також нехай $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ – одиничний вектор.

Тоді рівняння $x = x_0 + tu_1$, $y = y_0 + tu_2$ параметризують лінію через P_0 у напрямку $\vec{u}$. Якщо параметр t вимірює довжину з P_0 у напрямку $\vec{u}$, ми знайдемо швидкість зміни f у точці P_0 у напрямку $\vec{u}$ обчисливши $\frac{df}{dt}$ у точці P_0.

Означення. **Похідна $f(x, y)$ у точці $P_0 = (x_0, y_0)$ у напрямку одиничного вектора $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$** задається наступним виразом:

$$(D_{\vec{u}}f)_{P_0} = \left(\frac{df}{dt}\right)_{\vec{u},P_0} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tu_1, y_0+tu_2) - f(x_0,y_0)}{t},$$

при умові що ця границя існує.

Зауважимо, що частинні похідні $f_x(x_0,y_0)$ та $f_y(x_0,y_0)$ є похідними за напрямками функції f у точці P_0 у напрямках $\vec{\imath}$ та $\vec{\jmath}$ відповідно.

Приклад 18. Знайти похідну $f(x,y) = x^2 + xy$ в точці $P_0 = (1,2)$ у напрямку одиничного вектора $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$.

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{\vec{u},P_0} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tu_1, y_0+tu_2) - f(x_0,y_0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}, 2+\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - f(1,2)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\left(2+\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - (1^2+1\cdot 2)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{5}{\sqrt{2}}t + t^2}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{5}{\sqrt{2}} + t\right) = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

4.2. Обчислення похідних за напрямком та градієнти

Не завжди зручно використовувати означення для знаходження похідної за напрямком. Далі буде виведена простіша формула.

Але спочатку введемо новий термін.

Означення. **Градієнтний вектор (градієнт)** функції $f(x,y)$ в точці $P_0 = (x_0,y_0)$ – це вектор

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\vec{\imath} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\vec{\jmath},$$

який отримано шляхом обчислення частинних похідних f в точці P_0.

Отже, нехай як і раніше $x = x_0 + tu_1$, $y = y_0 + tu_2$ – пряма через P_0 у напрямку одиничного вектора $\vec{u} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath}$.

Тоді за ланцюговим правилом

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{\vec{u},P_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\frac{dy}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}u_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}u_2$$

$$= \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\vec{\imath} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\vec{\jmath}\right)\cdot(u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath})$$

Звідси видно, що похідна за напрямком – це скалярний добуток двох векторів.

Похідна за напрямком – це скалярний добуток. Якщо функція $f(x,y)$ є диференційованою на відкритому регіоні, що містить точку $P_0 = (x_0, y_0)$, то

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{\vec{u},P_0} = (\nabla f)_{P_0}\cdot\vec{u},$$

Тобто скалярний добуток градієнта в точці P_0 та $\vec{u}$. В короткому запису маємо, що $D_{\vec{u}}f = \nabla f\cdot\vec{u}$.

Приклад 19. Знайти похідну $f(x,y) = xe^y + \cos(xy)$ в точці $P_0 = (2,0)$ у напрямку одиничного вектора $\vec{v} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$.

Спочатку треба знайти одиничний вектор:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{5}\vec{\imath} - \frac{4}{5}\vec{\jmath}$$

Далі знайдемо частинні похідні:

$$f_x(2,0) = (e^y - y\sin(xy))_{(2,0)} = e^0 - 0\cdot\sin(2\cdot 0) = 1$$

$$f_y(2,0) = (xe^y - x\sin(xy))_{(2,0)} = 2e^0 - 2\cdot\sin(2\cdot 0) = 2$$

Градієнт в точці $(2,0)$ має наступний вигляд:

$$(\nabla f)_{(2,0)} = f_x(2,0)\vec{\imath} - f_y(2,0)\vec{\jmath} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$$

і похідна за напрямком

$$(D_{\vec{u}}f)_{(2,0)} = (\nabla f)_{(2,0)}\cdot\vec{u} = (\vec{\imath} + 2\vec{\jmath})\cdot\left(\frac{3}{5}\vec{\imath} - \frac{4}{5}\vec{\jmath}\right) = 1\cdot\frac{3}{5} + 2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = -1$$

Варто зауважити, що скалярний добуток можна переписати у наступному вигляді:

$$D_{\vec{u}}f = \nabla f \cdot \vec{u} = |\nabla f||\vec{u}|\cos(\theta) = |\nabla f|\cos(\theta),$$

де θ – кут між векторами ∇f та $\vec{u}$. Оскільки $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$, то можна отримати цікаві властивості похідної за напрямком.

Властивості похідної за напрямком $D_{\vec{u}}f = \nabla f \cdot \vec{u} = |\nabla f|\cos(\theta)$.

Функція зростає найшвидше коли $\cos(\theta) = 1$ або $\theta = 0$, тобто коли $\vec{u}$ у напрямку ∇f. Іншими словами, у кожній точці P області визначення функція зростає найшвидше у напрямку градієнта в точці P. Похідна у цьому напрямку дорівнює $|\nabla f|$.

Аналогічно, функція спадає найшвидше коли $\cos(\theta) = -1$ або $\theta = \pi$, тобто коли $\vec{u}$ у напрямку $-\nabla f$. Похідна у цьому напрямку дорівнює $-|\nabla f|$.

Будь-який напрямок $\vec{u}$ ортогональний градієнту $\nabla f \neq 0$ – напрямок нульової зміни f, тому що у цьому випадку $\theta = \frac{\pi}{2}$ і $D_{\vec{u}}f = |\nabla f|\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Ці властивості справедливі і для тривимірного випадку.

Приклад 20. Знайти напрямки в яких функція $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ в точці $P_0 = (1,1)$ зростає найшвидше, спадає найшвидше та не змінюється.

Градієнт в точці $(1,1)$ має наступний вигляд:

$$(\nabla f)_{(1,1)} = (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})_{(1,1)} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$$

Функція зростає найшвидше у напрямку градієнта.

Одиничний вектор у напрямку градієнта має наступний вигляд:

$$\vec{u} = \frac{(\nabla f)_{(1,1)}}{|(\nabla f)_{(1,1)}|} = \frac{\vec{\imath} + \vec{\jmath}}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$$

Функція зростає найшвидше у напрямку $-(\nabla f)_{(1,1)}$, тобто

$$-\vec{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$$

Функція не змінюється у напрямках, ортогональних градієнту.

Для того, щоб знайти ці напрямки/вектори, візьмемо довільний вектор $\vec{n} = n_1\vec{\imath} + n_2\vec{\jmath}$. Він має бути одиничним та скалярний добуток $\vec{n}$ та $(\nabla f)_{(1,1)}$ має дорівнювати 0:

$$\begin{cases} \sqrt{n_1^2 + n_2^2} = 1 \\ \dfrac{n_1}{\sqrt{2}} + \dfrac{n_2}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь отримаємо, що $(n_1, n_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ або $(n_1, n_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$:

$$\vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$$

$$-\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$$

Отже, сьогодні на лекції ми ознайомилися з поняттями границі, неперервності та диференційованості функцій кількох змінних, частинними похідними, подивилися як диференціювати складну та неявну функції кількох змінних, дізналися що таке градієнт функції та похідна за напрямком. Також сформулювали найважливіші теореми за цими темами.

5. Завершальна частина (*2-3 зх*)

Підсумовуючи, ставимо аудиторії запитання:

- Сформулюйте означення границі функції двох змінних у точці.
- Дайте означення неперервності функції двох змінних у точці.
- Який зв'язок існує між неперервністю функції та існуванням її частинних похідних у цій точці?
- Сформулюйте достатню умову диференційовності функції кількох змінних.
- Що таке похідна функції кількох змінних за напрямком? Як її обчислити?
- Який геометричний зміст має похідна за напрямком?
- Як пов'язана похідна за напрямком з градієнтом функції?

Додаток В

Зразок плану-конспекту практичного заняття з вищої математики

Вивчення елементів векторної алгебри у курсі вищої математики у ЗВО економічного та біологічного спрямування

Тема: Вектори та дії над векторами; декартова прямокутна система координат; скалярний, векторний та мішаний добутки векторів

Мета: *Поглибити та систематизувати* знання студентів з основних понять векторної алгебри, включаючи означення вектора, операції над векторами, поняття декартової прямокутної системи координат на площині та в просторі. *Сформувати практичні навички* виконання дій над векторами. *Опанувати методи обчислення* скалярного, векторного та мішаного добутків векторів та розуміти їх геометричний та фізичний зміст. *Навчити студентів застосовувати* векторний апарат для розв’язання типових задач, що зустрічаються в профільних фахових дисциплінах студентів.

Сприяти розвитку просторової уяви шляхом візуалізації векторів та дій над ними. *Удосконалювати навички самостійної роботи* при розв'язанні задач різного рівня складності. *Розвивати вміння встановлювати міжпредметні зв'язки* між вищою математикою та фаховими дисциплінами через застосування векторного апарату.

Сприяти формуванню культури математичного мислення, точності та обґрунтованості висновків. Заохочувати студентів до активної пізнавальної діяльності та самостійного пошуку розв’язків задач. *Показати практичну значущість* вищої математики, зокрема векторної алгебри, для майбутньої професійної діяльності студентів.

Тривалість: 90 хвилин

Рекомендована література:

1. Бабенко В. В. Збірник задач з вищої математики / В. В. Бабенко, А. Г. Зіневич, С. М. Кічура, Б. М. Тріщ, Ж. Я. Цаповська.– Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Іва- на Франка, 2005. – 255 с.

2. Барабаш Г. М. Збірник задач з курсу "Вища математика для економістів". Ч.1 / Г. М. Барабаш, В. М. Кирилич, О. В. Пелюшкевич.– Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2016.– 62с.

3. Барабаш Г. М. Практикум з курсу "Вища математика"/ Г. М. Барабаш, А. І. Гаталевич, С. М. Кічура, О. Я. Мильо.– Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007.– 158с.

4. Грисенко М. В. Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі: навч. посібник.– Київ: Либідь, 2007. – 720с.

5. Барабаш Г.М. Вища математика для біологів. Навчально-методичний посібник у двох частинах. Частина й // Львів. Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2013. - 136 с.

План практичного заняття:

1. Теоретичні відомості про вектори.
2. Практичні приклади: довжина вектора, дії над векторами, задачі на скалярний, векторний та мішаний добутки векторів.
3. Застосування векторів у біології та економічних задачах.
4. Завершення: підведення підсумків практики та обговорення отриманих результатів, запитання студентів.
5. Домашнє завдання.

ХІД ЗАНЯТТЯ

1.Організаційна частина заняття. (*2-3 хв*)

Початок заняття: вітання, короткий вступ для актуалізації опорних знань отриманих на лекційному занятті з даної теми.

2. Оголошення теми, мети та основних питань, які будуть розглянуті на практичному занятті, переліку рекомендованої літератури. (*3-5 хв*)

3. Теоретичні відомості про вектори (*15-20 хв*)

Множину з n дійсних чисел, які записані у певному порядку в стовпець, називають n**-вимірним вектором** і записують

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Числа x_i, $(i = 1,...,n)$ називають **координатами** вектора $\vec{x}$.

Відстань між початком вектора і його кінцем називають довжиною, або модулем вектора. Позначається $|\vec{x}|$.

Якщо початок вектора $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$ міститься в точці $A(x_1, y_1, z_1)$, а кінець – в точці $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, а довжина цього вектора дорівнює $|\vec{x}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Нульовим вектором називають вектор, початок і кінець якого співпадають. Дві взаємно перпендикулярні числові осі із загальним початком відліку (точка 0) називають **прямокутною декартовою системою координат на площині**.

Три взаємно перпендикулярні числові осі із загальним початком відліку (точка 0) називають **прямокутною декартовою системою координат у просторі.**

Якщо $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2),$$
$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2),$$
$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

Якщо $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ **колінеарні** (лежать на одній або паралельних прямих), то $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \lambda$.

Рівними називають вектори, які мають однакові довжини та напрямки.

Протилежними називають колінеарні протилежно спрямовані вектори однакової довжини.

Компланарними називають вектори, що лежать в одній площині.

Розклад вектора за ортами координатних осей $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, де x, y, z – це координати вектора (проекції вектора на координатні осі), а $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – це одиничні вектори координатних осей Ox, Oy, Oz відповідно.

Якщо задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то має місце розклад вектора $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$.

Скалярний добуток двох ненульових векторів:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b});$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

Якщо $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Кут між векторами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ визначається згідно формул

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}; \ \cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Умова **перпендикулярності** ненульових векторів $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0; \quad x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

Проекція вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ на вектор $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$:

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}; \ np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Напрямні косинуси вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$:

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{|\vec{a}|}; \ \cos\beta = \frac{y_1}{|\vec{a}|}; \ \cos\gamma = \frac{z_1}{|\vec{a}|},$$

де α, β, γ – кути, які утворює вектор $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ з додатними напрямками осей координат Ox, Oy, Oz відповідно. Для напрямних косинусів справедливе співвідношення: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Орт вектора $\vec{a}$: $\vec{a}_o = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Правило паралелограма (*ABCD*) додавання та віднімання векторів:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC};\ \ \overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$.

Векторний добуток векторів $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ і $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$: $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$, (якщо звести вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ до спільного початку, то із кінця вектора $\vec{c}$ найкоротший оберт від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ виглядає проти годинникової стрілки); $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$; $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a},\vec{b})$, $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}.$$

Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ і $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$:

$$S=|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a},\vec{b});\ \ S=\left|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}\right|.$$

Мішаний добуток векторів $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ і $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c});\ \ \vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}.$$

Об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ і $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$ (вектори зведені до спільного початку):

$$V=|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|;\ V=\left|\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}\right|.$$

Об’єм тетраедра, побудованого на векторах $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ і $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$ (вектори зведені до спільного початку):

$$V=\frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|;\ V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}\right|.$$

Умова компланарності ненульових векторів (вектори називаються компланарними, якщо вони лежать на одній або на паралельних площинах)

$$\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| = 0; \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Розв'язання задач (*35-40 хв*)

Приклад 1. Знайти:

а) координати вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) довжину вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

в) орт вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, якщо $M_1(-2,0,3)$ та $M_2(0,-1,-2)$.

Розв'язання:

а) $\overrightarrow{M_1M_2} = (0-(-2),-1-0,2-3)$; $\overrightarrow{M_1M_2} = (2,-1,-1)$.

б) $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{6}$.

в) $\left(\overrightarrow{M_1M_2}\right)_o = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Приклад 2. Задано трикутник ABC координатами вершин $A(-2,1,3)$, $B(0,-1,1)$, $C(3,0,5)$. Знайти:

а) скалярний добуток $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$;

б) векторний добуток $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$;

в) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на напрямок вектора $\overrightarrow{AC}$;

г) площу трикутника ABC.

Розв'язання:

а) Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB} = (2,-2,-2)$, $\overrightarrow{AC} = (5,-1,2)$. Отже,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\cdot 5 + (-2)\cdot(-1) + (-2)\cdot 2 = 8.$$

б)

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & -2\\ 5 & -1 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\,(-4-2)-\vec{j}\,(4+10)+\vec{k}\,(-2+10)$$

$$=-6\vec{i}-14\vec{j}+8\vec{k}$$

в) $np_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}_o=\dfrac{2\cdot5+(-2)\cdot(-1)+(-2)\cdot2}{\sqrt{5^2+(-1)^2+2^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{30}}=\dfrac{4\sqrt{30}}{15}.$

г) $S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{1}{2}\left|-6\vec{i}-14\vec{j}+8\vec{k}\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+(-14)^2+8^2}=\sqrt{74}$ (кв.од.).

При обчисленні скористались результатом пункту б).

Приклад 3. Задано вершини тетраедра $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,-4,8)$. Знайти довжину його висоти, проведеної із вершини D.

Розв'язання: Висоту $H=DK$ знайдемо із формули для об'єму тетраедра $V=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABC}\cdot H$. Звідки $H=\dfrac{3V}{S_{\Delta ABC}}$.

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AB}=(2,-2,-3)$, $\overrightarrow{AC}=(4,0,6)$, $\overrightarrow{AD}=(-7,-7,7)$. Об'єм тетраедра дорівнює

$$V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\\ -7 & -7 & 7\end{vmatrix}\right|=\frac{154}{3}\text{ (куб. од.)}$$

Знайдемо площу трикутника ABC:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & -2\\ 5 & -1 & 2\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|-12\vec{i}-24\vec{j}+8\vec{k}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{144+576+64}=14\text{ (кв. од.)}.$$

Тоді $H=3\cdot\dfrac{154}{3}\div14=11$.

Приклад 4. Знайти кут між векторами $\vec{a}=(-1,2,3)$ і $\vec{b}=(0,1,-2)$.

Розв'язання: $\cos\varphi=\dfrac{-1\cdot0+2\cdot1+3\cdot(-2)}{\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+(-2)^2}}=-\dfrac{2\sqrt{70}}{35}.$

Отже, $\varphi = \arccos\left(-\frac{2\sqrt{70}}{35}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{2\sqrt{70}}{35}\right)$.

Приклад 5. Визначити, при яких значення α і β вектори $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ колінеарні.

Розв'язання: Якщо вектори колінеарні, то їх відповідні координати прямо пропорційні: $\frac{-2}{\alpha} = \frac{3}{-6} = \frac{\beta}{2}$.

Звідки знаходимо $\alpha = 4$, $\beta = -1$.

Приклад 6. Визначити, при якому значенні α вектори $\vec{a} + \alpha\vec{b}$ і $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ будуть взаємно перпендикулярні, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$.

Розв'язання: Якщо вектори взаємно перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$\left(\vec{a} + \alpha\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a} + \alpha\vec{b}\right) = |\vec{a}|^2 - \alpha^2|\vec{b}|^2 = 9 - 25\alpha^2 = 0.$$

Отже, $\alpha = \pm\frac{3}{5}$.

Приклад 7. Перевірити, чи є вектори $\vec{a} = (2,-1,2)$, $\vec{b} = (1,2,-3)$, $\vec{c} = (3,-4,7)$ компланарними.

Розв'язання: Знайдемо мішаний добуток векторів:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 28 + 9 - 8 - (12 + 24 - 7) = 0.$$

Отже, вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є компланарними.

Приклад 8. Знайти координати вектора $3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$, де $A(2,-5,3)$, $B(0,-2,4)$, $C(-3,4,2)$.

Розв'язання: Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ -2-(-5) \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3-2 \\ 4-(-5) \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Тоді отримаємо координати шуканого вектора

$$3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC} = 3\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ -36 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -27 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Приклад 9. Визначити чи є колінеарними вектори $\vec{c}_1$ та $\vec{c}_2$, якщо $\vec{a} = (1,-2,3)$, $\vec{b} = (3,0,-1)$, $\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 4\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{a} - \vec{b}$.

Розв'язання: Обчислимо координати векторів $\vec{c}_1$ та $\vec{c}_2$:

$$\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 4\vec{b} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{c}_2 = 3\vec{a} - \vec{b} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Підставимо координати векторів $\vec{c}_1$ та $\vec{c}_2$, в умову колінеарності векторів

$\frac{14}{0} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{10}, \Rightarrow 0 = \frac{3}{2} = \frac{5}{1}$ – умова не виконується.

Отже, вектори $\vec{c}_1$ та $\vec{c}_2$ не є колінеарними.

Приклад 10. Визначити, за якого значення m вектори $\vec{a} = m\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - m\vec{k}$ перпендикулярні.

Розв'язання: Знайдемо координати векторів $\vec{a} = (m,-3,2)$, $\vec{b} = (1,2,-m)$.

Вектори перпендикулярні, якщо їхній скалярний добуток дорівнює нулеві:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = m - 6 - 2m = -6 - m \;\Rightarrow\; -6 - m = 0 \;\Rightarrow\; m = -6.$$

Отже, при $m = -6$ вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні.

Приклад 11. Знайти об'єм тетраедра з вершинами в точках $A(-1,2,1)$, $B(0,1,2)$, $C(-3,4,1)$, $D(-1,4,3)$.

Розв'язання: Шуканий об'єм обчислюємо за формулою $V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BC}\overrightarrow{BD}\right|$.

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -1-0 \\ 2-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3-0 \\ 4-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -1-0 \\ 4-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо мішаний добуток

$$\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BC}\overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3+9+1-(3+3-3) = -3+10-3 = 4.$$

Отже, $V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BC}\overrightarrow{BD}\right| = \frac{1}{6}|4| = \frac{2}{3}$ (куб. од.).

4. Застосування векторів у біології та економічних задачах (*18-24 хв*)

Економіка

Продуктивна функція. При аналізі закономірностей виробництва використовується продуктивна функція, яка, по суті, є співвідношенням між використаними у виробництві ресурсами і випущеною продукцією. Нехай в деякому виробничому процесі є *n* виробничих ресурсів. Кількість *i*-го ресурсу, який використали за проміжок часу *t*, позначимо x_i. Тоді виробничі ресурси – це вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Нехай підприємство випускає *m* різних виробів. Кількість *j* виробу позначимо y_i. Тоді випуск усіх виробів буде вектор $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$. Нехай $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_p)$ – вектор параметрів виробництва (наприклад, різні види транспортних чи інших витрат). Продуктивна функція пов'язує вектори ресурсів *X*, випуску *Y* та параметрів $\vec{a}$, тобто $F(X, Y, \vec{a}) = 0$.

Продуктивна функція задається аналітично або таблично. Продуктивну функцію, розв'язану відносно *Y*, тобто вигляду $Y = f(X, \vec{a})$, називають функцією випуску, а розв'язану відносно вектора *X*, тобто вигляду $X = \varphi(Y, \vec{a})$ називають функцією виробничих витрат.

Зрозуміло, що ці функції у конкретних випадках (коли вказано закони f та φ) використовують правила дій з векторами.

Математичні моделі економічних задач

Навіть найпростіші лінійні статистичні економічні моделі описуються з використанням векторів.

Для дослідження динамічних моделей різних процесів стан економічної системи, що вивчається, в момент часу t описується за допомогою вектора X із n-вимірного простору, а керування процесом в той самий момент часу описується за допомогою вектора $\vec{U}(t)$ із m-вимірного простору.

Таким чином, в динамічних моделях використовуються вектори n- та m-вимірних просторів, координати яких залежать від часу t.

Біологія

Розглянемо популяцію, яка складається з n вікових груп. Тоді кількість особин популяції в кожний окремий момент часу t можна охарактеризувати вектором $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, де $x_i(t)$ а – кількість особин популяції віком i в момент часу t.

Популяційний вектор екосистеми, яка утворена n співіснуючими видами, визначають як n-вимірний вектор $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, де i-та компонента x_i характеризує кількість особин i-го виду.

Якщо кількість особин кожного виду подвоюється, то новий популяційний вектор набуде вигляду $\vec{x}=\begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ \vdots \\ 2x_n \end{pmatrix}$.

Якщо в екосистему додають по три особини кожного виду, то новий популяційний вектор набуде вигляду $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 + 3 \\ x_2 + 3 \\ \vdots \\ x_n + 3 \end{pmatrix}$.

Розглянемо дві ізольовані екосистеми з популяційними векторами $\vec{x}$ та $\vec{y}$, відповідно, якщо їх об'єднати в одну, то популяційний вектор нової екосистеми дорівнюватиме $\vec{x} + \vec{y}$.

5. Домашнє завдання (*2-3 хв*)

1. Визначити чи є колінеарними вектори $\vec{c}_1$ та $\vec{c}_2$, якщо $\vec{a} = (1, -3, 8)$, $\vec{b} = (3, 0, -5)$, $\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = \vec{a} + 3\vec{b}$.

2. Визначити, за якого значення m вектори $\vec{a} = 2m\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - m\vec{k}$ перпендикулярні.

3. Задано трикутник ABC координатами вершин $A(-1, 2, 0)$, $B(1, -1, 1)$, $C(0, 3, 5)$. Знайти:

а) скалярний добуток $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$;

б) векторний добуток $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$;

в) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на напрямок вектора $\overrightarrow{AC}$;

г) площу трикутника ABC;

д) кум між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$.

4. Задано тетраедр з вершинами в точках $A(2, -1, 0)$, $B(0, 2, -1)$, $C(-3, 5, 2)$, $D(4, 0, 2)$. Знайти:

а) об'єм тетраедра;

б) площу основи ABC;

в) довжину висоти, опущеної з вершини D.

5. Перевірити, чи є вектори $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = (-1, 0, 4)$, $\vec{c} = \vec{j} - 3\vec{k}$ компланарними.

6. Підсумки заняття (*3-5 хв*)

- Які основні лінійні операції можна виконувати над векторами?
- Що таке векторний добуток двох векторів? Яким є його напрямок?
- Як обчислити площу паралелограма, побудованого на двох векторах?
- Що таке мішаний добуток трьох векторів? Яка його геометрична інтерпретація?
- За якої умови три вектори є компланарними?
- Опишіть послідовність дій для знаходження кута між двома векторами, заданими своїми координатами в декартовій системі координат.
- Наведіть приклади застосування векторів у вашій майбутній професії.

Додаток С

Зразок контрольної роботи з вищої математики

Варіант 1

Завдання 1. Обчислити значення даного виразу, де A і B задані матриці:

$$C = B^2 - 3AB + 2E, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $C = \begin{pmatrix} -12 & -24 \\ 51 & 90 \end{pmatrix}$.

Завдання 2. Знайти матрицю, обернену до даної: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 8 \\ 3 & -1 & 9 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\frac{1}{124}\begin{pmatrix} -2 & 8 & 26 \\ 15 & -28 & 33 \\ 9 & 8 & -5 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Розв'язати СЛАР: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -2 \end{cases}$.

Відповідь: (1, 0, 1, 0).

Завдання 4. Для заданої моделі міжгалузевого балансу (2 галузі)

Галузь	Споживання x_{ij}		Кінцевий продукт Y	Валовий випуск X
Виробництво	1	2		
1	100	20	180	300
2	155	45	150	350

обчислити необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцевий продукт першої галузі збільшити в три рази, а другої галузі зменшити на половину.

Відповідь: $\overline{X} = \begin{pmatrix} 861{,}14 \\ 596{,}63 \end{pmatrix}$.

Завдання 5. Для заданої функції $y = f(x)$ обчислити еластичність в точці $x = x_0$:

$$y = \frac{x-5}{x^2+1},\ x_0 = 1.$$

Відповідь: $-\frac{5}{4}$.

Варіант 2

Завдання 1. Знайти похідну функції $z = x^2y + 3y^2x - 3xy + 2x - 6\ln y + 3$ у точці $M(2,1)$ за напрямком вектора $\overrightarrow{MN}$, де $N(-1,5)$.

Відповідь: $-\frac{2}{5}$.

Завдання 2. Обчислити наближено $\ln\left(0{,}09^3 + 0{,}99^3\right)$.

Відповідь: $-0{,}03$.

Завдання 3. Показати, що функція $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ задовольняє рівняння $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$.

Завдання 4 (6 балів). Дослідити на локальний екстремуму функцію.

$$z = 2x^2 + 3y^2 - 4xy + 3x - 6y + 1$$

Відповідь: $z_{\min} = -\frac{19}{8}$ в точці $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

Завдання 5 (9 балів). Знайти найбільше M та найменше m значення функції $z = x^2 - xy + y^2 - 4x + 2$ у замкнені області, обмеженій прямими: $x = 0,\ y = 0,\ x + 2y - 10 = 0$.

Відповідь: $m = -\frac{10}{3}$, $M = 62$.