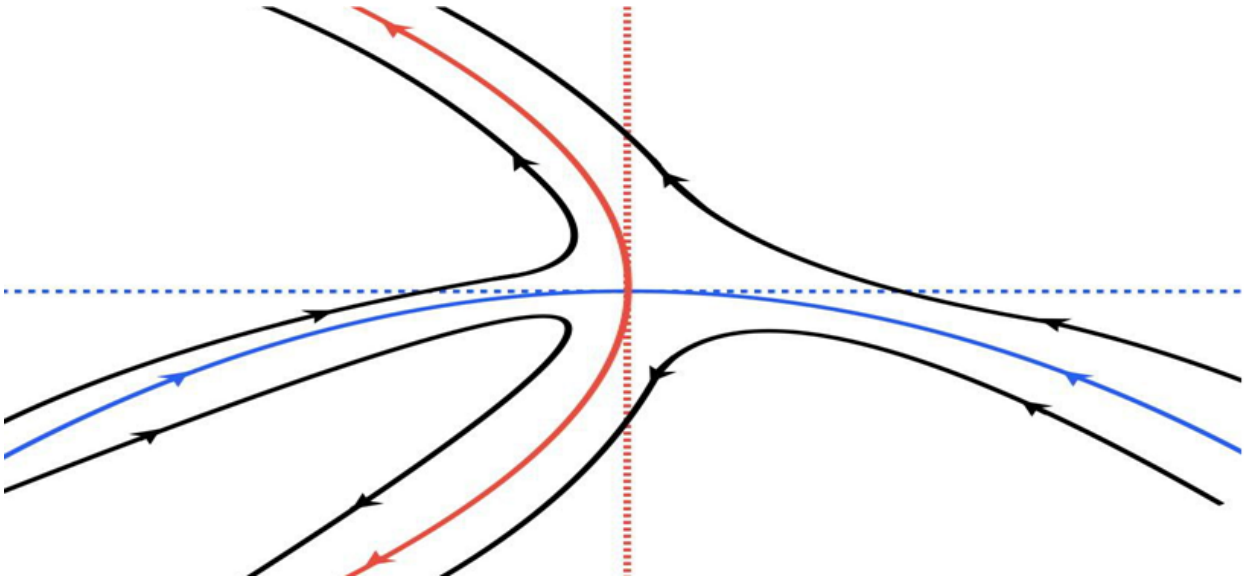
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
кафедра інтегральних та диференціальних рівнянь

Конспект лекцій з курсу

"Вибрані питання теорії динамічних систем"

Капустян О.В., Сукретна А.В.



КИЇВ — 2025

Конспект лекцій з курсу "Вибрані питання теорії динамічних систем" / О.В. Капустян, А.В. Сукретна. – К.: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2025. – 75 с.

Рекомендовано вченою радою механіко-математичного факультету
(протокол №11 від 10 квітня 2025 року)

Конспект лекцій з курсу ”Вибрані питання теорії динамічних систем”, що читається у 2му семестрі 3го курсу та є складовою освітньої програми підготовки фахівців за освітнім рівнем ”бакалавр” галузі знань 11 (Е7) Математика та статистика зі спеціальності 111 Математика освітньої програми ”Математика”, присвячений вивченню підходів до аналізу поведінки динамічних систем, що описуються лінійними та нелінійними системами диференціальних рівнянь. Курс починається з вивчення лінійних систем диференціальних рівнянь, при цьому запропоновано ефективний метод розв’язання лінійних систем довільної розмірності. Основна ж частина курсу присвячена вивченню нелінійних систем диференціальних рівнянь і динамічних систем, породжених ними, при цьому основна увага зосереджена на якісному та геометричному аналізі нелінійних динамічних систем. Зокрема, представлено локальну теорію, що включає такі відомі результати, як теорема про стійкий многовид та теорема Гробмана – Хартмана.

Зміст

Вступ 4

Тема 1. Лінійні системи диференціальних рівнянь та найпростіші динамічні системи 5

Тема 2. Лінійні динамічні системи та експонента матриці 9

Тема 3. Лінійні динамічні системи в $\mathbb{R}^2$ 16

Тема 4. Лінійні динамічні системи в $\mathbb{R}^n$ 27

Тема 5. Лінійні динамічні системи: поведінка при $t \to \pm\infty$ 33

Тема 6. Лінійні неоднорідні системи 41

Тема 7. Нелінійні динамічні системи: загальні факти 43

Тема 8. Нелінійні динамічні системи: лінеаризація 57

Тема 9. Теорема про стійкий многовид 63

Тема 10. Теорема Хартмана – Гробмана 75

Література 77

Вступ

Теорія динамічних систем — це галузь математичної науки, яка вивчає питання аналізу систем, параметри яких змінюються в часі. Ця математична дисципліна, є природним узагальненням досліджень в класичній механіці та диференціальних рівняннях.

Динамічні системи діляться на два типи — неперервні та дискретні. Перші описують еволюцію моделі в залежності від неперервного часу і задаються, як правило, диференціальними рівняннями. Такі системи широко використовуються в науці і прикладних дослідженнях, тому ми приділимо основну увагу саме їм.

Курс "Вибрані питання теорії динамічних систем" є складовою освітньої програми підготовки фахівців за освітнім рівнем "бакалавр" галузі знань 11 (Е7) Математика та статистика зі спеціальності 111 Математика освітньої програми "Математика". Конспект лекцій з курсу "Вибрані питання теорії динамічних систем" присвячений вивченню підходів до аналізу поведінки динамічних систем, що описуються системами диференціальних рівнянь.

Курс охоплює теми, необхідні для чіткого розуміння якісної теорії звичайних диференціальних рівнянь і поняття динамічної системи. Він починається з вивчення лінійних систем диференціальних рівнянь, при цьому запропоновано ефективний метод розв'язання лінійних систем довільної розмірності. Основна ж частина курсу присвячена вивченню нелінійних систем диференціальних рівнянь і динамічних систем, породжених ними. Оскільки більшість нелінійних систем диференціальних рівнянь розв'язати неможливо, основна увага зосереджена на якісному та геометричному аналізі нелінійних динамічних систем. Зокрема, представлено локальну теорію, що включає такі відомі результати, як теорема про стійкий многовид та теорема Гробмана – Хартмана.

Лекційний матеріал згрупований за темами, кожній з яких присвячена певна кількість занять. Логічний перехід між темами є природним і послідовним. Викладений теоретичний матеріал проілюстрований значною кількістю прикладів. Також наведена певна кількість завдань для самостійного виконання студентами, метою яких є краще засвоєння теоретичного матеріалу шляхом його безпосереднього застосування до практичних задач.

Конспект лекцій з курсу "Вибрані питання теорії динамічних систем" є корисним додатковим джерелом для студентів при засвоєнні матеріалу курсу, а також для всіх читачів, бажаючих познайомитися з основами теорії динамічних систем, породжених диференціальними рівняннями та їх системами.

Тема 1. Лінійні системи диференціальних рівнянь та найпростіші динамічні системи

Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь зі сталою матрицею

$$\dot{x} = Ax \tag{1}$$

відносно невідомої вектор-функції $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ скалярного аргумента $t \in \mathbb{R}$, A – дійснозначна матриця $n \times n$, $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}$.

У випадку $n = 1$ приходимо до скалярного рівняння

$$\dot{x} = ax, \quad a \in \mathbb{R},$$

розв'язок якого для будь-якого $t \in \mathbb{R}$ має вигляд $x(t) = ce^{at}$, де $c = x(0) \in \in \mathbb{R}$ – початкове дане. Фазовим простором у цьому випадку є пряма $\mathbb{R}$. Таким чином, множина всіх розв'язків скалярного рівняння породжує відображення

$$\varphi(t, c) = ce^{at}.$$

Відображення $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задає ***динамічну систему***, що породжена скалярним рівнянням $\dot{x} = ax$.

Для $n = 2$ розглянемо, наприклад, таку систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = 2x_2. \end{cases}$$

Тут фазовий вектор $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}[-1, 2]$ – діагональна матриця. Оскільки матриця системи діагональна, то система розщеплюється на два окремі скалярні рівняння, а отже, її розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-t}, \\ x_2(t) = c_2 e^{2t}; \end{cases}$$

де $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = x(0) \in \mathbb{R}^2$ – вектор початкових даних. Звідси у векторному вигляді отримуємо формулу

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} c.$$

У цьому прикладі у нас ***фазовий простір*** (*phase space*) – це $\mathbb{R}^2$, $x(t) \in \in \mathbb{R}^2$ – ***фазова точка*** (*phase point*). У цьому курсі нас цікавитиме поведінка розв'язків системи, тобто як рухається фазова точка у фазовому просторі. Тоді динамічна система, породжена заданою системою диференціальних рівнянь, має вигляд

$$\varphi(t, c) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} c.$$

Точка $\bar{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ є ***положенням рівноваги*** (*equilibrium point*) отриманої динамічної системи, тобто точкою, що залишається незмінною під дією динамічної системи

$$\forall\, t \quad \varphi(t, \bar{c}) = \bar{c}.$$

Під ***фазовим портретом*** динамічної системи будемо розуміти множину всіх траєкторій у фазовому просторі динамічної системи з указаним напрямом руху вздовж траєкторії.

Оскільки для нашої системи

$$\begin{cases} x_1^2(t) = c_1^2 e^{-2t}, \\ x_2(t) = c_2 e^{2t}; \end{cases}$$

то $x_1^2 \cdot x_2 = c_1^2 \cdot c_2 = K = \text{const}$, тобто фазові траєкторії мають вигляд гіпербол $x_2 = \dfrac{K}{x_1^2}$. Крім того, до фазових траєкторій належать координатні півосі. Дійсно, якщо $c_1 = 0$, то розв'язком системи буде

$$\begin{cases} x_1(t) = 0, \\ x_2(t) = c_2 e^{2t}. \end{cases}$$

Фазова точка цього розв'язку належить осі $0x_2$, причому вона віддаляється від початку координат $(0, 0)$ при $t \to \infty$. Аналогічно при $c_2 = 0$ фазова траєкторія

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-t}, \\ x_2(t) = 0; \end{cases}$$

належить осі $0x_1$ та наближається до початку координат $(0, 0)$ при $t \to \infty$. Враховуючи, що рух по гіперболам узгоджений з рухом вздовж координатних осей, отримуємо повний фазовий портрет, зображений на Рис. 1.

З Рис. 1 бачимо, що завжди $x_1(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Введемо важливий для подальших досліджень об'єкт.

Для початкових даних вигляду $\begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, що належать осі $0x_1$, фазова точка $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ також буде належити осі $0x_1$ (це означає інваріант-

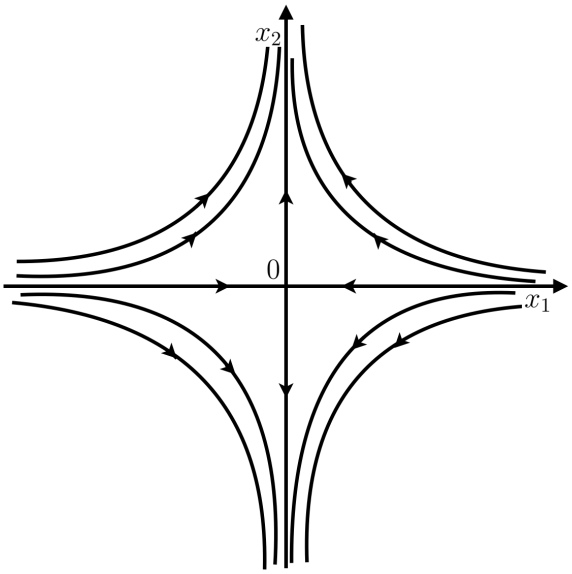


Рис. 1

ність) і, крім того, ця фазова точка прямуватиме до положення рівноваги $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ при $t \to \infty$. Якщо спостерігається така поведінка, що ми можемо виділити множину в фазовому просторі, яка є інваріантною (тобто якщо точка стартувала в цій множині, то вона в ній і залишається) і при цьому кожна фазова траєкторія, що стартує з цієї множини, наближається до положення рівноваги, то ця множина буде називатися ***стійким підпростором*** (***стійким многовидом*** у випадку нелінійної системи).

Для прикладу, фазовий портрет якого зображено на Рис. 1, вісь $0x_1$ є стійким підпростором.

Аналогічно для початкових даних вигляду $\begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$, що належать осі $0x_2$, фазова точка $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ також буде належити осі $0x_2$, але тепер ця фазова точка віддалятиметься від положення рівноваги при $t \to \infty$, або, що те саме, прямуватиме до положення рівноваги $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ при $t \to$ $\to -\infty$. Відповідно вісь $0x_2$ є нестійким підпростором.

Якщо тепер розглянути загальний n-вимірний випадок з діагональною матрицею

$$A = \operatorname{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

то динамічна система, що попроджується системою лінійних диференці-

альних рівнянь

$$\dot{x} = Ax,$$

задається відображенням $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, яке діє за правилом

$$\varphi(t, c) = \operatorname{diag}[e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}] \cdot c,$$

де $c = x(0) \in \mathbb{R}^n$ – вектор початкових даних.

Завдання 1. *Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь, виписати оператор φ, який визначає відповідну динамічні систему, та схематично зобразити поведінку розв'язків*

1) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1, \\ \dot{x}_2 = x_2 \\ \dot{x}_3 = -x_3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \\ \dot{x}_3 = x_3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = -3x_2 \\ \dot{x}_3 = -x_3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 \\ \dot{x}_3 = x_3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 \\ \dot{x}_3 = x_3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = 2x_2, \\ \dot{x}_3 = x_3; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = -x_2, \\ \dot{x}_3 = x_3; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1, \\ \dot{x}_2 = x_2, \\ \dot{x}_3 = x_3; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{x}_3 = -x_3; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2, \\ \dot{x}_3 = -x_3; \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_3 = x_3; \end{cases}$

12) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_3 = -x_3. \end{cases}$

Тема 2. Лінійні динамічні системи та експонента матриці

Ми вже з'ясували, що для діагональної матриці

$$A = \operatorname{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

динамічна система, що породжується системою лінійних диференціальних рівнянь з матрицею A

$$\dot{x} = Ax \tag{2}$$

має вигляд

$$\varphi(t, c) = \operatorname{diag}[e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}] \cdot c,$$

де $c = x(0) \in \mathbb{R}^n$ – вектор початкових даних.

Таким чином, динамічна система задає відображення

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

яке кожному значенню часового параметру $t \in \mathbb{R}$ і кожному початковому даному $c \in \mathbb{R}$ ставить у відповідність значення розв'язку системи, що стартує з початкових даних c, у момент часу t.

Тепер розглянемо випадок, коли матриця A не є діагональною, і процедуру діагоналізації, якщо вона можлива.

Нам знадобиться таке твердження з курсу лінійної алгебри

Твердження 1 (про діагоналізацію матриці, власні числа якої є дійсними та простими). *Якщо власні числа (eigenvalues) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матриці A дійсні та різні, то набір відповідних власних векторів (eigenvectors) $v_1, \ldots, v_n$ формує базис в $\mathbb{R}^n$, при цьому матриця $P = [v_1, \ldots, v_n]$, стовчиками якої є власні вектори, є невиродженою та*

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n].$$

Отже, за виконання умов твердження, тобто якщо власні числа матриці A є дійсними та різними, система (2) лінійною заміною зводиться до діагонального вигляду. Дійсно, виконуючи заміну

$$y = P^{-1}x \quad \Leftrightarrow \quad x = Py,$$

отримуємо систему

$$\dot{y} = P^{-1}\dot{x} = P^{-1}Ax = P^{-1}APy$$

з діагональною матрицею $P^{-1}AP$:

$$\dot{y} = \operatorname{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]y,$$

для якої розв'язок нам вже відомий:

$$y(t) = \operatorname{diag}[e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}]y(0).$$

Далі, повертаючись до змінної x, знаходимо

$$x(t) = Py(t) = P \cdot \operatorname{diag}[e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}] \cdot P^{-1}x(0).$$

Таким чином, ми одержали формулу для динамічної системи, породженої лінійною системою (1), якщо власні числа матриці цієї системи дійсні та різні

$$\varphi(t, c) = P \cdot \operatorname{diag}[e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}] \cdot P^{-1}c.$$

Приклад 1. *Розглянемо систему*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 3x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_2. \end{cases}$$

Матриця цієї системи

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

має власні числа $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$. Знаходимо власні вектори

$$\lambda_1 = -1: \quad (A - \lambda_1 E)v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} v = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 = 2: \quad (A - \lambda_2 E)v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Далі записуємо матрицю переходу та шукаємо обернену до неї

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді заміна, яка зведе нашу систему до діагонального вигляду

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

і в змінних $y_1,\ y_2$ система набуває діагонального вигляду

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1, \\ \dot{y}_2 = 2y_2. \end{cases}$$

Отже,

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{-t}y_1(0), \\ y_2(t) = e^{2t}y_2(0); \end{cases}$$

і ми можемо побудувати фазовий портрет у змінних y_1, y_2 – Рис. 2 Тоді

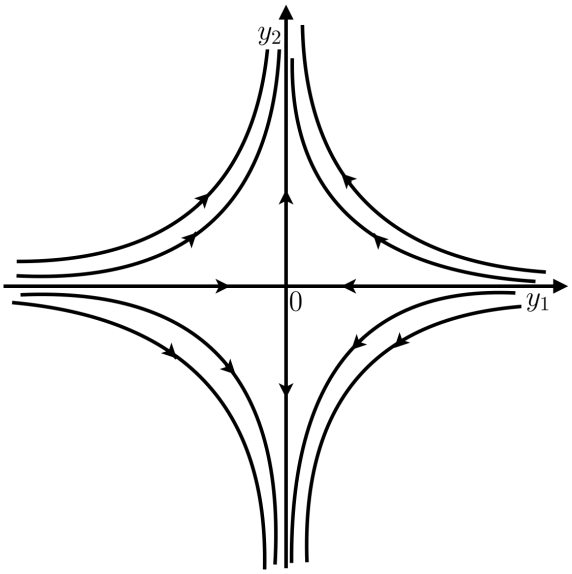


Рис. 2

вихідна динамічна системи знаходиться за формулами

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(0),$$

тобто динамічна система $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ має вигляд:

$$\varphi(t, c) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} c.$$

Зазначимо, що $\varphi(t, 0) = 0$, тобто 0 – положення рівноваги.

Зобразимо фазовий портрет у змінних x_1, x_2.

Траєкторії, що відповідають початковим значенням $\begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$ проходитимуть вздовж векторів v_1 і v_2 відповідно та слугуватимуть асимптотами для інших траєкторій типу гіпербол – Рис. 3.

Вісь $0x_1$ є інваріантною множиною – стійким підпростором, тобто будь-яка точка (окрім положення рівноваги 0), що розташована на осі $0x_1$ під дією динамічної системи здійснюватиме рух вздовж цієї осі, прямуючи до точки 0 при $t \to +\infty$.

Пряма $x_2 = -x_1$ є інваріантною множиною – нестійким підпростором, тобто будь-яка точка (окрім положення рівноваги 0), що розташована на прямій $x_2 = -x_1$ під дією динамічної системи здійснюватиме рух вздовж цієї прямої, віддаляючись від точки 0 при $t \to +\infty$ або, що те саме, прямуючи до точки 0 при $t \to -\infty$.

Поняття стійкого та нестійкого підпростору можна розширити на n-випадок.

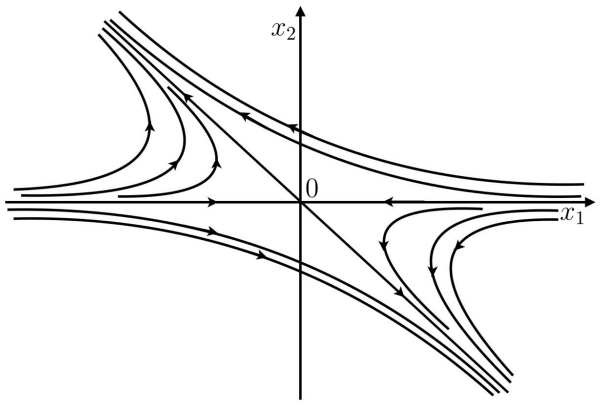


Рис. 3

Означення 1. *Нехай матриця A розмірності $n \times n$ має k від'ємних власних чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_k < 0$ та $n-k$ додітних власних чисел $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n > 0$. Нехай також ці власні числа прості та їм відповідають власні вектори $v_1, \ldots, v_n$. Тоді* ***стійкий і нестійкий підпростори (stable and unstable spaces)*** *для відповідної лінійної системи диференціальних рівнянь (2) визначаються рівностями*

$$E^s = \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_k\},$$

$$E^u = \mathrm{Span}\{v_{k+1}, \ldots, v_n\},$$

де $\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ *– лінійна оболонка векторів $v_1, \ldots, v_k$, тобто підпростір, який складається з усіх лінійних комбінацій цих векторів.*

Неважко зрозуміти, що для довільного початкового значення $c \in E^s$ при кожному t : $\varphi(t, c) \in E^s$ і, крім того,

$$\varphi(t, c) \to 0, \ t \to +\infty.$$

Аналогічно для довільного початкового значення $c \in E^u$ при кожному t : $\varphi(t, c) \in E^u$ і, крім того,

$$\varphi(t, c) \to 0, \ t \to -\infty.$$

Перейдемо до поняття експоненти матриці.

Для вектора $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n. \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ будемо використовувати евклідову норму (*Euclidian norm*):

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Тоді для $n \times n$-матриць $B = ((b_{i,j}))_{i,j=1}^{n}$ відповідна норма визначається рівністю

$$\|B\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}^2}.$$

Введена таким чином норма матриць задовольняє аксіоми норми та інші властивості:

1) $\|B\| \geq 0$ та $\|B\| = 0 \;\Leftrightarrow\; B = 0$;

2) $\|\alpha B\| = |\alpha| \|B\|$ для довільного $\alpha \in \mathbb{R}$;

3) $\|B_1 + B_2\| \leq \|B_1\| + \|B_2\|$;

4) $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|Bx\| \leq \|B\| \cdot \|x\|$;

5) $\|B \cdot C\| \leq \|B\| \cdot \|C\|$, зокрема, $\|B^k\| \leq \|B\|^k$ для довільного k.

Крім того, ми можемо ввести поняття збіжності матриць:

$$B_n \to B, \quad \text{якщо} \quad \|B_n - B\| \to 0.$$

У нашому випадку (тобто для матриць $n \times n$ із введеною нормою) збіжність матриць еквівалентна покомпонентні збіжності:

$$B_n \to B \quad \Leftrightarrow \quad b_{ij}^{(n)} \to b_{ij} \quad \forall i, j = \overline{1, n}.$$

Лема 1. *Ряд (series)*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k \cdot t^k}{k!}$$

збігається абсолютно та рівномірно на відрізку $|t| \leq T$ для довільного T (тобто $\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{B^k \cdot t^k}{k!}$ збігається рівномірно на $|t| \leq T$ до деякої матриці при $T \to \infty$).

Доведення. Оскільки

$$\left\| \frac{B^k t^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|B^k\| \cdot |t|^k}{k!} \leq \frac{\Big(\|B^k\| \cdot T\Big)^k}{k!}$$

та числовий ряд $\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{(\|B\|^k \cdot T)^k}{k!}$ збіжний, то вихідний ряд збігається за ознакою Веєрштрасса (*Weierstrass M-test*). $\square$

Означення 2. *Матриця*

$$e^B := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}$$

називається ***експонентою матриці (matrix exponential)***

Відповідно

$$e^{Bt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k \cdot t^k}{k!} \ .$$

Властивості експоненти:

1) Якщо $B = \mathrm{diag}[b_1, \ldots, b_n]$, то $e^B = \mathrm{diag}[e^{b_1}, \ldots, e^{b_n}]$.

2) Для довільної матриці B вірна оцінка $\|e^B\| \leq e^{\|B\|}$.

3) Якщо для деякої невиродженої матриці P : матриці A та B пов'язані співвідношенням $B = PAP^{-1}$, то $e^B = Pe^AP^{-1}$.

4) Якщо матриці A та B комутують, тобто $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

5) Для довільної матриці B матриця e^B невироджена та $\left(e^B\right)^{-1} = e^{-B}$.

6) Кожна матриця комутує зі своєю експонентою, тобто $Ae^A = e^A \cdot A$.

Теорема 1 (Основна теорема теорії лінійних динамічних систем)**.** *Нехай A – це $n \times n$-матриця. Тоді для будь-якого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ задача Коші (initial value problem, рідше Cauchy problem)*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = x_0; \end{cases} \tag{3}$$

має єдиний розв'язок

$$x(t) = e^{At}x_0.$$

Наслідок 1. *Загальна форма лінійної динамічної системи, породженої системою (2):*

$$\varphi(t, c) = e^{At} \cdot c.$$

Доведення. Для початку покажемо диференційовність експоненти матриці e^{At} по t.

Оскільки $e^{A(t+h)} = e^{At} \cdot e^{ht}$, то за означенням похідної

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = e^{At} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^{Ah} - I}{h},$$

де $I = \mathrm{diag}[1, \ldots, 1]$ – одинична матриця. Далі, враховуючи означення e^{Ah}, маємо

$$\frac{d}{dt}e^{At} = e^{At} \cdot \lim_{h\to 0}\lim_{k\to\infty}\left(A + \frac{A^2h}{2!} + \ldots + \frac{A^k \cdot h^{k-1}}{k!}\right).$$

Оскільки ряд, за допомогою якого визначена експонента матриці абсолютно та рівномірно збіжний, наприклад, при $|h| \le 1$, то ми можемо поміняти границі місцями та знайти границю при $h \to 0$:

$$\frac{d}{dt}e^{At} = e^{At} \cdot \lim_{k\to\infty}\lim_{h\to 0}\left(A + \frac{A^2h}{2!} + \ldots + \frac{A^k \cdot h^{k-1}}{k!}\right) = e^{At} \cdot A = Ae^{At},$$

відповідно до властивості 6) експоненти матриці.

Таким чином, ми показали, що

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}.$$

Тоді для функції $x(t) = e^{At} \cdot x_0$ маємо

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}e^{At} \cdot x_0 = Ae^{At} \cdot x_0 = Ax(t),$$

тобто $x(t)$ задовольняє систему. Крім того, $x(t)$ також задовольняє початкову умову

$$x(0) = I \cdot x_0 = x_0.$$

Отже, $x(t) = e^{At} \cdot x_0$ – розв'язок (3).

Для доведення єдиності візьмемо будь-який розв'язок задачі Коші (3) $x = x(t)$ і покладемо

$$y(t) = e^{-At} \cdot x(t).$$

Тоді

$$\frac{d}{dt}y(t) = -Ae^{-At} \cdot x(t) + e^{-At} \cdot \frac{dx}{dt} = -Ae^{-At} \cdot x(t) + e^{-At} \cdot Ax(t) \equiv 0.$$

Звідси $y(t) \equiv const$, тобто $y(t) \equiv y(0) = x_0$, а отже, $x(t) = e^{At} \cdot x_0$. □

Наслідок 2. *Якщо матриця A має дійсні різні власні числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то її експонента обчислюється за формулою*

$$e^{At} = P \cdot \mathrm{diag}[e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}] \cdot P^{-1},$$

де матриця $P = [v_1, \ldots, v_n]$ – це матриця, стовпчиками якої є власні вектори $\{v_1, \ldots, v_n\}$, що відповідають власним числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Завдання 2. *Для системи з Завдання 1 знайти:*

- *власні числа матриці системи;*
- *власні вектори;*
- *стійкий та нестійкий підпростори.*

Тема 3. Лінійні динамічні системи в $\mathbb{R}^2$

Знайдемо значення експоненти матриці для деяких матриць розмірності 2×2.

Приклад 2. *Розглянемо матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Тоді

$$e^A = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{At} \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{pmatrix}.$$

Зокрема, для матриці $A = aI = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$:

$$e^A = e^a \cdot I = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix}, \quad e^{At} = e^{at} \cdot I = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. *Для матриці*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

маємо

$$e^A = e^a \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{At} = e^{at} \cdot \begin{pmatrix} 1 & bt \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Дійсно

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B} = aI + B,$$

причому матриці aI і B комутують. Тоді

$$e^A = e^{aI+B} = e^{aI} \cdot e^B = e^a \cdot e^B.$$

Далі за означеннням

$$e^B = I + B + \frac{B^2}{2} + \ldots,$$

а оскільки

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B^3 = B^4 = \ldots,$$

то звідси отримуємо

$$e^B = I + B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^A = e^a \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4. *Для матриці*

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

маємо

$$e^A = e^a \cdot \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}, \quad e^{At} = e^{at} \cdot \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}.$$

Для доведення цього факту розглянемо число $\lambda = a + ib$. Тоді за формулою Ейлера (Euler's formula):

$$e^\lambda = e^a\big(\cos b + i \sin b\big).$$

Далі знаходимо

$$\lambda^2 = (a+ib)(a+ib) = \underbrace{a^2 - b^2}_{\operatorname{Re}\lambda^2} + i \cdot \underbrace{2ab}_{\operatorname{Im}\lambda^2},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\lambda^2 & -\operatorname{Im}\lambda^2 \\ \operatorname{Im}\lambda^2 & \operatorname{Re}\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

За індукцією можна довести, що для довільного $k \geq 1$ справедлива наступна формула

$$A^k = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\lambda^k & -\operatorname{Im}\lambda^k \\ \operatorname{Im}\lambda^k & \operatorname{Re}\lambda^k \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\dfrac{\lambda^k}{k!} & -\operatorname{Im}\dfrac{\lambda^k}{k!} \\ \operatorname{Im}\dfrac{\lambda^k}{k!} & \operatorname{Re}\dfrac{\lambda^k}{k!} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} e^\lambda & -\operatorname{Im} e^\lambda \\ \operatorname{Im} e^\lambda & \operatorname{Re} e^\lambda \end{pmatrix} = e^{at} \cdot \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}.$$

Твердження 2. *Для кожної матриці A розмірності 2×2 існує невироджена матриця P розмірності 2×2 така, що матриця $B = P^{-1}AP$ має один з трьох типів*

1) $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, *якщо A має дійсні різні власні числа λ, μ, або ж власні числа однакові, але матриця A – діагональна;*

2) $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, *якщо A має дійсне власне число λ кратності 2, причому матриця A – не є діагональною;*

3) $B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, *якщо* A *має комплексні власні числа* $a \pm ib$.

Наслідок 3. *Враховуючи формулу*

$$e^{At} = P \cdot e^{Bt} \cdot P^{-1},$$

динамічну систему породжену системою диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{4}$$

можна звести до динамічної системи, породженої

$$\dot{x} = Bx, \tag{5}$$

де матриця B *належить до одного з трьох типів.*

При цьому фазовий портрет системи (5) за допомогою лінійного невиродженого перетворення P *переходить у фазовий портрет системи (4) і навпаки.*

А динамічна система для системи (5) має вигляд $\varphi(t, c) = e^{Bt} \cdot c, \ c \in \mathbb{R}^2$, *тобто знаходиться за формулами*

$$\varphi(t, c) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} c, \quad \varphi(t, c) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} c,$$

$$\varphi(t, c) = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix} c$$

відповідно.

Побудуємо фазові портрети в кожному з цих випадків.

1. Випадок дійсних власних чисел різних знаків: $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $\lambda < 0 < \mu$.

У цьому випадку фазовий портрет називається ***сідло (saddle)***

Для розв'язку системи (5)

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} : \quad \begin{cases} x_1(t) = e^{\lambda t} \cdot x_1^0, \\ x_2(t) = e^{\mu t} \cdot x_2^0. \end{cases}$$

Тому фазова точка $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ лежить на гіперболах $x_2 = x^{\frac{\lambda}{\mu}} \cdot c$, при цьому, враховуючи знаки λ та μ :

$$x_1(t) \to 0, \ t \to \infty; \quad x_2(t) \to 0, \ t \to -\infty.$$

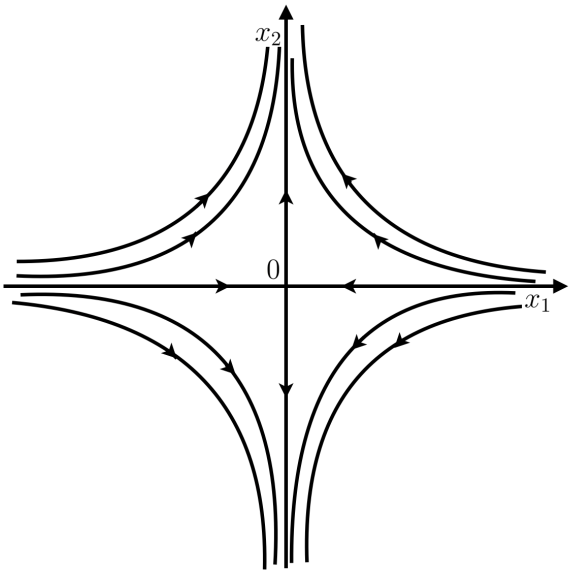


Рис. 4

Сідло нестійке, до точки $(0,0)$ при $t \to \infty$ наближаються лише дві фазові траєкторії, що лежать на осі $0x_1$, решта траєкторій віддаляється від початку координат – Рис. 4.

2. Фазовий портрет типу ***вузол (node)*** реалізується при дійсних власних числах однакових знаків, тобто для наступних варіантах матриці B :

а) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda < 0$; **б)** $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $\lambda < \mu < 0$; **в)** $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda < 0$.

Вузол буде стійким, якщо $\lambda < 0,\ \mu < 0$, і нестійким, якщо $\lambda > 0,\ \mu > 0$.

Детальніше розглянемо фазові портрети в кожному з випадків а) – в).

а) Для матриці $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda < 0$, фазова траєкторія системи (5) має вигляд

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{\lambda t} \cdot x_1^0, \\ x_2(t) = e^{\lambda t} \cdot x_2^0; \end{cases}$$

і просто поділивши друге рівняння на перше робимо висновок, що фазова точка $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ лежить на прямих $x_2 = cx_1$, причому оскільки $\lambda < 0$, то на Рис. 5

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \to \infty,$$

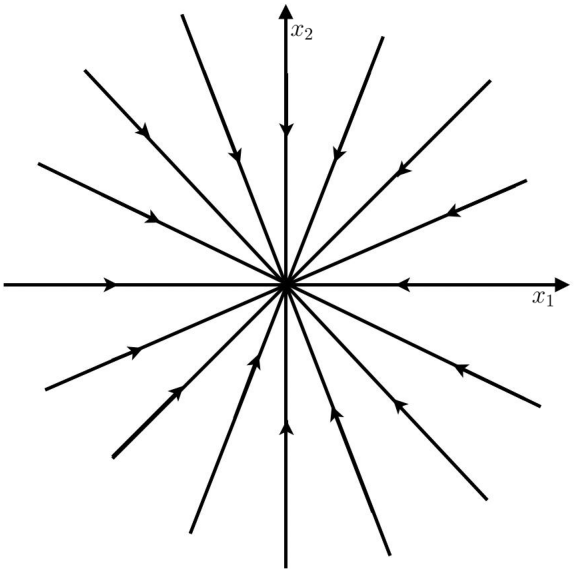


Рис. 5

б) Для матриці $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $\lambda < \mu < 0$, фазова траєкторія системи (5) має вигляд

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{\lambda t} \cdot x_1^0, \\ x_2(t) = e^{\mu t} \cdot x_2^0; \end{cases}$$

виключивши з системи t, отримуємо, що фазова точка $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ лежить на параболі

$$x_1 = x_2^{\frac{\lambda}{\mu}}, \text{ причому } \frac{\lambda}{\mu} > 1.$$

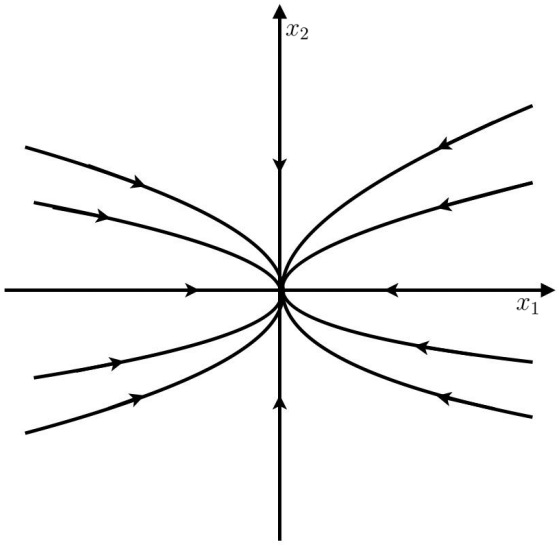


Рис. 6

Оскільки $\lambda < 0$ та $\mu < 0$, то на Рис. 6:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \to \infty.$$

в) Для матриці $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda < 0$, система (5) набуває трикутного вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = \lambda x_2; \end{cases}$$

і може бути розв'язана послідовним інтегрування: спочатку друге рівняння, а потім перше, в яке підстановляємо вже отриману функцію $x_2(t)$. Також можна використати формулу для явного вигляду динамічної системи, з якої маємо

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{\lambda t}\big(x_1^0 + x_2^0 \cdot t\big), \\ x_2(t) = e^{\lambda t} x_2^0. \end{cases}$$

Звідси враховуючи, що $\lambda < 0$, бачимо, що фазова точка рухається до початку координат при $t \to \infty$:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \to \infty.$$

Крім того,

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1^0}{x_2^0} + t = \frac{x_1^0}{x_2^0} + \frac{1}{\lambda}\ln|x_2| - \frac{1}{\lambda}\ln|x_2^0|.$$

Отже, фазова точка $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ лежить на кривих вигляду

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\lambda}\ln|x_2| + c.$$

Дослідимо криву

$$x_1(x_2) = \frac{x_2}{\lambda}\ln|x_2| + cx_2.$$

Оскільки

$$x_1'(x_2) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\ln|x_2| + c \to \infty, \ x_2 \to 0,$$

то дотична до кривої у точках, де $x_2 = 0$, має бути вертикальна.

Помітимо, що значення $x_1(x_2)$ обертається на 0 при $\frac{1}{\lambda}\ln|x_2| = -c$, водночас при $\frac{1}{\lambda}\ln|x_2| = -c$ маємо $x_1'(x_2) = \frac{1}{\lambda}$.

Отже, всі фазові траєкторії, примикаючи до початку координат $(0, 0)$, мають горизонтальну дотичну і, перетинають вісь $0x_2$ під одним і тим самим кутом, тобто мають однакову дотичну при $x_1 = 0$ – Рис. 7.

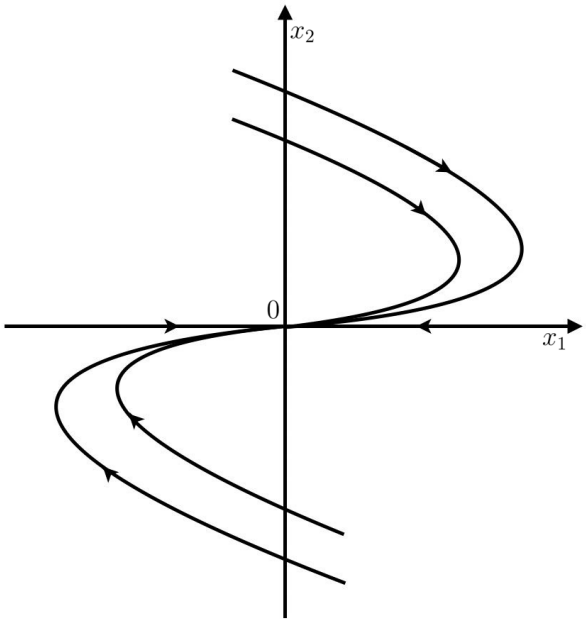


Рис. 7

3. Випадок комплексних власних чисел розпадається на два підвипадки.

а) Якщо матриця B має вигляд $B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, де a для визначеності вважатимемо від'ємним: $a < 0$, то отримуємо стійкий (або нестійкий при $a > 0$) ***фокус (focus)***.

У цьому випадку система (5) має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 - bx_2, \\ \dot{x}_2 = bx_1 + ax_2; \end{cases}$$

та її розв'язок задається формулою

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix},$$

з якої зокрема випливає, що

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \to \infty.$$

Для побудови фазового портрету перейдемо до полярних координат:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta, \\ x_2 = r\sin\theta; \end{cases}$$

де $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$ – нові невідомі функції, що визначають радіус-вектор точки та його кут нахилу до осі $0x_1$ – Рис. 8.

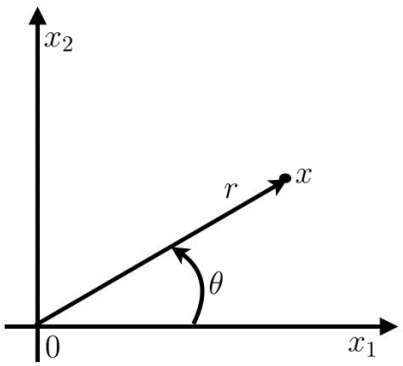


Рис. 8

Оскільки

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \\ \dot{x}_2 = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta; \end{cases}$$

то після підстановки в систему і нескладних перетворень отримуємо розщеплену систему у полярних координатах (r, θ) :

$$\begin{cases} \dot{r} = ar, \\ \dot{\theta} = b. \end{cases}$$

Звідси маємо

$$\begin{cases} r(t) = r(0)e^{at}, \\ \theta = b \cdot t + \theta(0); \end{cases}$$

тобто траєкторії динамічної системи є спіралями, руху по яким відбувається у напрямку початку координат і при цьому залежить від знаку b. Якщо $b > 0$, то рух спіралями відбувається за годинниковою стрілкою (clockwise motion), а якщо $b < 0$, то проти годинникової стрілки – Рис. 9.

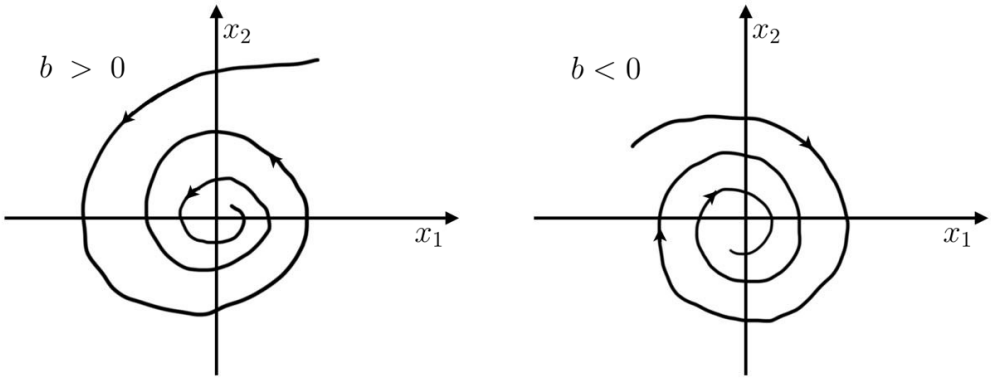


Рис. 9

б) Якщо матриця B має вигляд $B = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$, то маємо фазовий портрет типу ***центр (center)***.

При переході до полярних координат маємо

$$\begin{cases} \dot{r} = 0, \\ \dot{\theta} = b, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} r(t) \equiv r(0), \\ \theta = b \cdot t + \theta(0). \end{cases}$$

А це означає, що фазова точка $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ лежить на замкнених кривих (для динамічної системи з матрицею B це будуть кола, для динамічної системи з матрицею A – еліпси), що розташовані навколо початку координат.

Аналогічно попередньому випадку отримуємо два варіанти фазових портретів, що залежать від знаку b – Рис. 10.

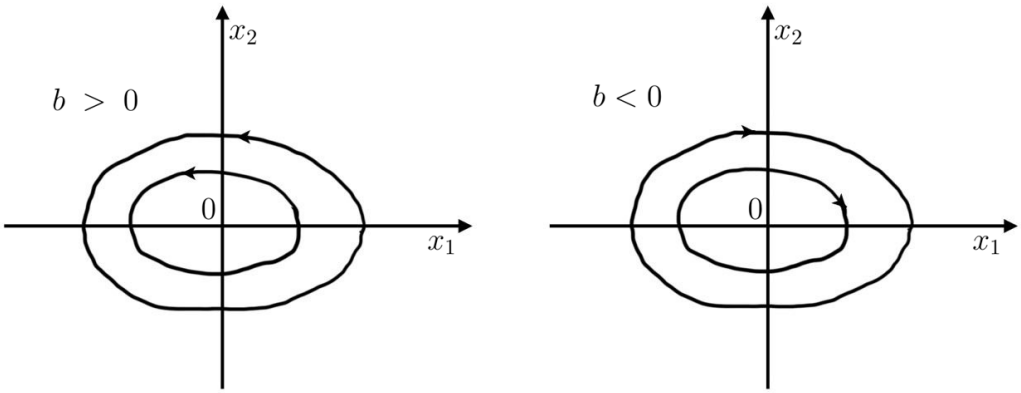


Рис. 10

4. Випадок виродженої матриці: $\det A = 0$, тобто коли одне або обидва власні числа нульові.

У цьому випадку отримуємо ***пряму положень рівноваги***.

а) Якщо матриця B має вигляд $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a < 0$, то для системи (5) отримуємо

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1, \\ \dot{x}_2 = 0; \end{cases}$$

а її розв'язком буде

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{at}x_1^0, \\ x_2(t) \equiv x_2^0. \end{cases}$$

Отже, пряма $x_1 = 0$ є прямою положень рівноваги, тобто кожна точка цієї прямої є окремою траєкторією – положенням рівноваги, а всі інші фазові траєкторії лежать на прямих $x_2 = \text{const}$, при цьому кожна траєкторія є напівпрямою, що примикає до положення рівноваги. Таким чином,

кожна пряма $x_2 = \text{const}$ містить три фазові траєкторії: дві напівпрямі та положення рівноваги.

$$x_1(t) \to 0, \quad t \to \infty.$$

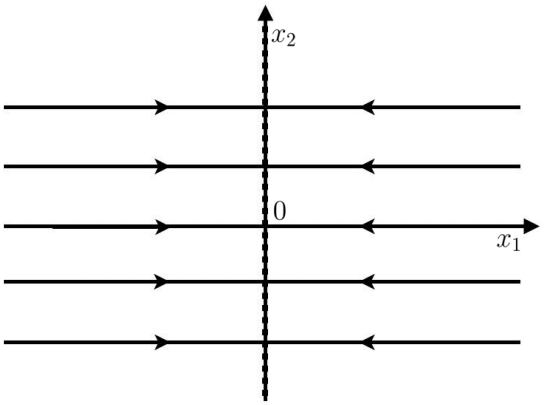


Рис. 11

б) Якщо матриця B має два нульових власних числа і при цьому не є нульовою, то її вигляд $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тоді для системи (5) отримуємо

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 0. \end{cases}$$

У цьому випадку кожна точка прямої $x_2 = 0$ є положенням рівноваги і не рухається під дією динамічної системи. Всі інші фазові траєкторії, аналогічно попередньому випадку, лежать на прямих $x_2 = \text{const}$, проте тепер кожна така пряма є цілою траєкторією. Крім того, для $x_2 > 0$ функція $x_1(t)$ строго монотонно зростає, тобто у верхній напівплощині рух по фазовим траєкторіям відбувається зліва направо, в той час, як при $x_2 < 0$ функція $x_1(t)$ строго монотонно спадає, і у нижній напівплощині рух відбувається справа наліво – Рис. 12.

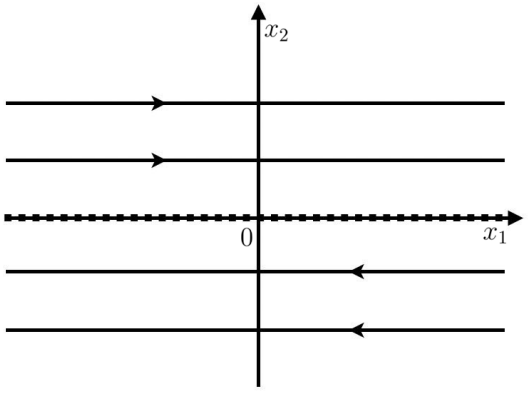


Рис. 12

Завдання 3. *Дослідити тип особливої точки* $(0,0)$ *системи в залежності від значення параметра* α *та побудувати біфуркаційну діаграму.*

1) $\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - \alpha x_2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 + 2x_2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + \alpha x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + 2x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + \alpha x_2; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - 2x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - \alpha x_2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \alpha x_2; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2\alpha x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 - 2x_2; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 + \alpha x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1; \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \alpha x_2; \end{cases}$

12) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \alpha x_2. \end{cases}$

Тема 4. Лінійні динамічні системи в $\mathbb{R}^n$

Повернемося до лінійної n-вимірної системи диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

зі сталою матрицею A розмірності $n \times n$.

Як ми вже з'ясували, відповідна динамічна система, що породжена (6), має вигляд

$$\varphi(t, c) = e^{At} \cdot c, \tag{7}$$

де t – часовий параметр, c – вектор початкових даних.

Також ми з'ясували, що якщо матриця A має дійсні та різні власні $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, то відповідні власні вектори $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ утворюють базис в $\mathbb{R}^n$, тобто матриця

$$P = [v_1, \ldots, v_n]$$

є невиродженою, та

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n],$$

а отже,

$$\varphi(t, c) = P\operatorname{diag}[e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}]P^{-1}c.$$

Теорема 2. *Якщо A – матриця розмірності $2n \times 2n$, що має $2n$ різних комплексних власних чисел*

$$\lambda_j = a_j + ib_j, \quad \bar{\lambda}_j = a_j - ib_j, \quad a_j, b_j \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, n}$$

і відповідні власні вектори

$$\omega_j = u_j + iv_j, \quad \bar{\omega}_j = u_j - iv_j, \quad u_j, v_j \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, n},$$

то набір векторів

$$\{u_1,\ v_1,\ u_2,\ v_2,\ \ldots\ u_n,\ v_n\}$$

формує базис в $\mathbb{R}^{2n}$, тобто матриця

$$P = \operatorname{diag}\big[v_1,\ u_1,\ v_2,\ u_2,\ \ldots\ v_n,\ u_n\big]$$

є невиродженою та

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}\Big[B_1,\ \ldots,\ B_n\Big],$$

де

$$B_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Наслідок 4. *Динамічна система, породжена системою (6), у цьому випадку має вигляд*

$$\varphi(t,c) = e^{At}c =$$

$$= P\mathrm{diag}\left[e^{a_1 t}\begin{pmatrix}\cos b_1 t & -\sin b_1 t\\ \sin b_1 t & \cos b_1 t\end{pmatrix},\ \dots,\ e^{a_n t}\begin{pmatrix}\cos b_n t & -\sin b_n t\\ \sin b_n t & \cos b_n t\end{pmatrix}\right]P^{-1}c.$$

Приклад 5. *Розглянемо двовимірну систему*

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 - x_2,\\ \dot{x}_2 = 4x_1 - x_2.\end{cases}$$

Матриця системи має вигляд $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & -1\end{pmatrix}$ та її власні числа $\lambda = 1 \pm 2i$. Власному числу $\lambda = 1 + 2i$ відповідає власний вектор

$$\omega = \begin{pmatrix}-1\\ 2i\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}}_{=u} + i\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}}_{=v}.$$

Тоді

$$P = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix},\quad P^{-1} = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

і для $c = \begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$ маємо

$$\varphi(t,c) = \begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}e^t\begin{pmatrix}\cos 2t & -\sin 2t\\ \sin 2t & \cos 2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}.$$

Фазовим портретом буде нестійкий фокус – Рис. 13.

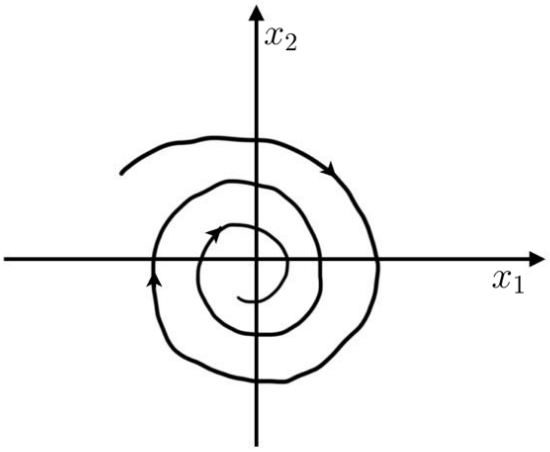


Рис. 13

Теорема 3. *Нехай матриця A має як дійсні, так і комплексні, різні власні числа. А саме, нехай $\lambda_1,\ \ldots, \lambda_k$ – дійсні власні числа з відповідними власними векторами $v_1\ \ldots,\ v_k,\ a\ \ a_j \pm ib_j,\ j = \overline{k+1, n}$ – комплексні власні числа з відповідними власними векторами $\omega_j = u_j + iv_j,\ \bar{\omega} = u_j - iv_j$. Тоді набір векторів $\{v_1, \ldots,\ v_k,\ v_{k+1}, u_{k+1},\ \ldots\ v_n,\ u_n\}$ утворює базис простору $\mathbb{R}^n$, матриця*

$$P = \big[v_1, \ldots,\ v_k,\ v_{k+1}, u_{k+1},\ \ldots\ v_n,\ u_n\big]$$

є невиродженою та

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}\big[\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_k,\ B_{k+1},\ \ldots B_n\big],$$

де

$$B_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}, \quad j = \overline{k+1, n}.$$

Наслідок 5. *За умов теореми 3 відповідна динамічна система породжена системою (6), має вигляд*

$$\varphi(t, c) = P\operatorname{diag}\left[e^{\lambda_1 t},\ \ldots, e^{\lambda_k},\ \ldots,\ \underbrace{e^{a_j t}\begin{pmatrix} \cos b_j t & -\sin b_j t \\ \sin b_j t & \cos b_j t \end{pmatrix}}_{j=\overline{k+1,n}}, \ldots\right] P^{-1}c.$$

Приклад 6. *Розглянемо систему*

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{де} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця A має власні числа $\lambda_1 = -3$ і $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$.

Знайдемо власні вектори:

$$\lambda_1 = -3 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_{2,3} = 2 + i \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=u_2} + i\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_2}.$$

Отже, матриця переходу та її обернена мають вигляд

$$P = [v_1, v_2, u_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

і для $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ відповідна динамічна система

$$\varphi(t,c) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t}\cos t & -e^{2t}\sin t \\ 0 & e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t \end{pmatrix} P^{-1} \cdot c.$$

Визначимо стійкий і нестійкий підпростори для цієї тривимірної системи.

Стійкий підпростір

$$E^s = \text{ вісь } x_1 \equiv \mathrm{Span}\{v_1\},$$

тобто для $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E^s$ маємо $\varphi(t,c) \in E^s$ та $\varphi(t,c) \to 0$ при $t \to \infty$.

Нестійкий підпростір

$$E^u = \text{ площина } 0x_2x_3 \equiv \mathrm{Span}\{v_2, u_2\},$$

тобто для $c = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in E^u$ маємо $\varphi(t,c) \in E^u$ та $\varphi(t,c) \to 0$ при $t \to -\infty$.

Отже, стійкий підпростір породжується власними векторами, власні числа яких мають від'ємну дійсну частину, а нестійкий підпростір породжується власними векторами, для яких відповідні власні числа мають додатню дійсну частину.

Розглянемо **випадок кратних власних чисел**.

Нехай матриця A розмірності $n\times$ має кратні власні числа.

Означення 3. *Нехай λ – власне число матриці A кратності $m \le n$. Тоді для $k = \overline{1,m}$ будь-який ненульовий розв'язок рівняння*

$$\big(A - \lambda I\big)^m v = 0$$

називається ***узагальненим власним вектором*** *(generalized eigenvector) матриці A.*

Якщо власне число просте, тобто $k = 1$, то отримуємо звичайне означення власного вектора.

Означення 4. *Матриця N називається* ***нільпотентною порядку*** *k, якщо $N^{k-1} \neq 0$ та $N^k = 0$.*

Теорема 4. *Нехай матриця A має дійсні власні числа $\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_n$, записані з урахуванням їх кратності. Тоді існує базис в $\mathbb{R}^n$, складений з узагальнених власних векторів $\{v_1, \ \ldots, \ v_n\}$, такий, що матриця*

$$P = [v_1, \ \ldots, \ v_n]$$

невироджена та

$$A = S + N, \quad \text{де} \quad P^{-1}SP = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_n\},$$

а матриця N нільпотентна порядку $k \leq n$, причому ці матриці комутують, тобто $SN = NS$.

Наслідок 6. *Динамічна система, породжена системою (6) з матрицею A у випадку, коли ця матриця задовольняє умови теореми 4, має вигляд*

$$\varphi(t, c) = e^{At}c = e^{(N+S)t}c = e^{St}e^{Nt}c =$$

$$= P \cdot \operatorname{diag}[e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}] \cdot P^{-1} \cdot \left[I + Nt + \ldots + \frac{N^{k-1} \cdot t^{k-1}}{(k-1)!}\right] \cdot c.$$

Наслідок 7. *Нехай матриця A розмірності $n \times n$ має одне власне число λ кратності n. Тоді*

$$S = \operatorname{diag}[\lambda, \ldots, \lambda] = \lambda I, \quad P = I, \quad N = A - S.$$

Динамічна система, породжена системою (6) з матрицею A у цьому випадку має вигляд

$$\varphi(t, c) = e^{\lambda t} \cdot \left[I + Nt + \ldots + \frac{N^{n-1} \cdot t^{n-1}}{(n-1)!}\right] \cdot c.$$

Приклад 7. *Розглянемо систему*

$$\dot{x} = Ax, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння для матриці A має вигляд $(\lambda-2)^2 = 0$, тобто $\lambda = 2$ є власним числом кратності 2. Тоді

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad N = S - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad N^2 = 0.$$

Отже, для довільних $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ маємо

$$\varphi(t, c) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{2t}(I + Nt) \cdot c = e^{2t} \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Теорема 5. *Якщо матриця A має комплексні кратні власні числа $\lambda_j = a_j \pm ib_j$ з відповідними узагальненими власними векторами $\omega_j = u_j + iv_j$, $\bar{\omega}_j = u_j - iv_j$, то вектори $\{v_1,\ u_1,\ v_2,\ u_2,\ \ldots,\ v_n,\ u_n\}$ формують базис у просторі $\mathbb{R}^{2n}$, матриця*

$$P = [v_1,\ u_1,\ v_2,\ u_2,\ \ldots,\ v_n,\ u_n]$$

– невироджена та

$$A = S + N, \quad \text{де} \quad P^{-1}SP = \operatorname{diag}\big[B_1,\ \ldots,\ B_n\big], \quad B_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix},$$

N – нільпотентна матриця порядку $k \le 2n$, $NS = SN$.

Наслідок 8. *Динамічна система, породжена системою (6) з матрицею A у випадку, коли ця матриця задовольняє умови теореми 5, має вигляд*

$$\varphi(t,c) = P \cdot \operatorname{diag}\left[\ldots, \underbrace{e^{a_j t} \cdot \begin{pmatrix} \cos b_j t & -\sin b_j t \\ \sin b_j t & \cos b_j t \end{pmatrix}}_{j=\overline{1,n}}\right] \cdot P^{-1}\cdot$$

$$\cdot \left[I + Nt + \frac{N^2t^2}{2!} \ldots + \frac{N^{k-1}\cdot t^{k-1}}{(k-1)!}\right] \cdot c.$$

Таким чином, ми описали всі можливі випадки динамічних систем, які породжені системою (6) зі сталою матрицею A.

Як бачимо, за поведінку на нескінченності відповідає виключно множник $e^{a_j t}$.

Тема 5. Лінійні динамічні системи: поведінка при $t \to \pm\infty$

Проаналізуємо поведінку розв'язків системи (6).

Нехай $\omega_j = u_j + iv_j$ – узагальнені власні вектори, що відповідають власним числам $\lambda_j = a_j + ib_j$. Тоді вектори $\{v_1,\ u_1,\ v_2,\ u_2, \ldots\}$ формують базис в $\mathbb{R}^n$.

Введемо низку означень.

Означення 5. ***Стійкий підпростір*** *(stable subspace) – це підпростір, породжений тими узагальненими власними векторами, що відповідають власним числам з від'ємною дійсною частиною:*

$$E^s = \mathrm{Span}\{u_j,\ v_j \ \mid \ a_j < 0\}.$$

Нестійкий підпростір *(unstable subspace) – це підпростір, породжений тими узагальненими власними векторами, що відповідають власним числам з додатною дійсною частиною:*

$$E^u = \mathrm{Span}\{u_j,\ v_j \ \mid \ a_j > 0\}.$$

Центральний підпростір *(central subspace) – це підпростір, породжений тими узагальненими власними векторами, що відповідають власним числам з нульовою дійсною частиною:*

$$E^c = \mathrm{Span}\{u_j,\ v_j \ \mid \ a_j = 0\}.$$

З викладеного вище випливають такі твердження:

- для довільних $c \in E^s$ маємо $\varphi(t, c) \in E^s$ та $\varphi(t, c) \to 0$ при $t \to \infty$;
- для довільних $c \in E^u$ маємо $\varphi(t, c) \in E^u$ та $\varphi(t, c) \to 0$ при $t \to -\infty$.

У випадку $c \in E^c$ поведінка $\varphi(t, c)$ залежить від k, зокрема, для $k \geq 2$: $\varphi(t, c) \to \infty$ при $t \to \pm\infty$.

Приклад 8. *Розглянемо систему*

$$\dot{x} = Ax, \quad \textit{де} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матриця A має пару комплексно-спряжених власних чисел $\lambda_{1,2} = -2 \pm \pm i$ та дійсне власне число $\lambda_3 = 3$. Знайходячи відповідні власні вектори, отримуємо

$$\lambda_1 = -2 + i \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=u_1} + i \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_1};$$

$$\lambda_3 = 3 \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді власний базис складається з векторів $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Оскільки $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = -2 < 0$, а $\operatorname{Re}\lambda_3 = 3 > 0$, то

$$E^s = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{ площина } 0x_1x_2;$$

$$E^u = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{ вісь } 0x_3.$$

Поведінка фазових траєкторій зображена на Рис. 14: точка, що стартує з нестікого многовиду – осі $0x_3$ – продовжує рух по осі до нескінченності (червона траєкторія); точка, що стартує зі стійкого многовиду – площини $0x_1x_2$ – залишається в цій площині та прямує до початку координат при $t \to \infty$ (синя траєкторія); для довільної початкової точки простору $\mathbb{R}^3$: $x_1^2(t) + x_2^2(t) \to 0$, $x_3(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ (чорна траєкторія).

Приклад 9. *Розглянемо систему*

$$\dot{x} = Ax, \quad \textit{де} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матриця A має пару комплексно-спряжених власних чисел $\lambda_{1,2} = \pm i$ та дійсне власне число $\lambda_3 = 2$. Знайходячи відповідні власні вектори, отримуємо

$$\lambda_1 = i \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=u_1} + i \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_1};$$

$$\lambda_3 = 2 \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = -0$, а $\operatorname{Re}\lambda_3 = 3 > 0$, то

$$E^s = \operatorname{Span}\{0\};$$

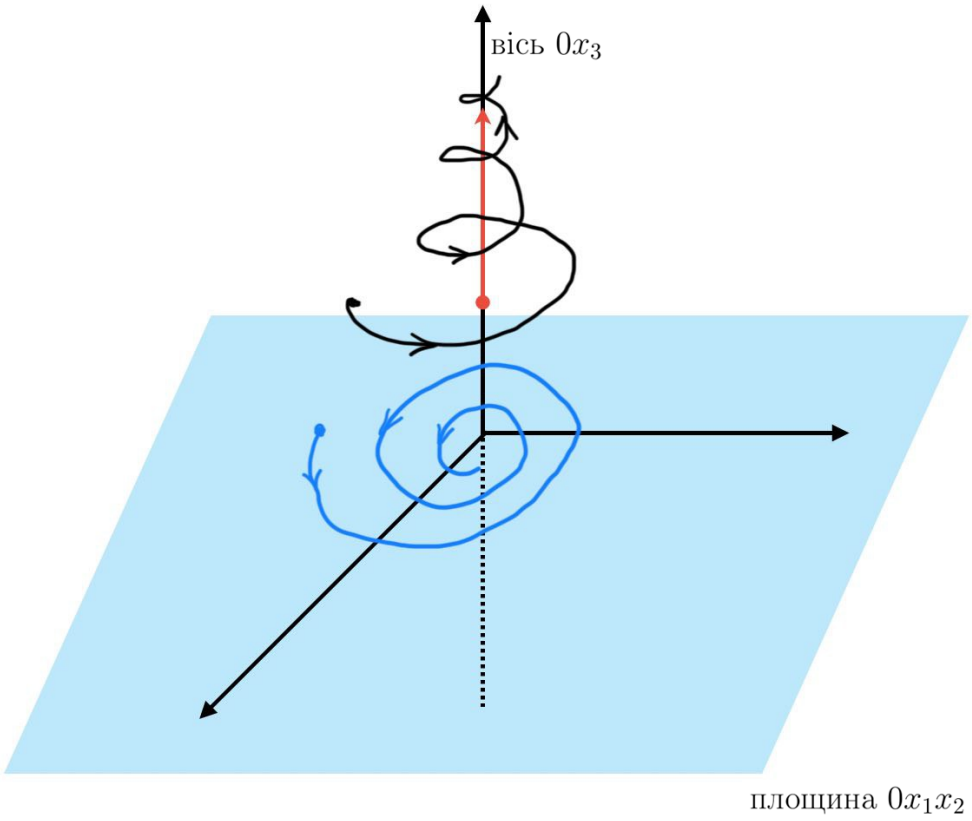


Рис. 14

$$E^u = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \text{ вісь } 0x_3;$$

$$E^c = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\} = \text{ площина } 0x_1x_2.$$

Підсумовуючи наведені вище міркування, отримуємо такий висновок.

Нехай $\{\omega_j = u_j + iv_j\}$ – узагальнені власні вектори матриці A у системі лінійних диференціальних рівнянь (6), що відповідають власним числам $\{\lambda_j = a_j + ib_j\}$ (у випадку простого власного числа маємо звичайний власний вектор). Тоді вектори $\{u_j,\ v_j\}$ утворюють базис в $\mathbb{R}^n$, що розбиває весь простір $\mathbb{R}^n$ на три підпростори:

- стійкий підпростір
$$E^s = \{u_j,\ v_j \ \mid \ a_j < 0\};$$
- нестійкий підпростір
$$E^u = \{u_j,\ v_j \ \mid \ a_j > 0\};$$

- центральний підпростір

$$E^c = \{u_j,\ v_j \ \mid \ a_j = 0\}.$$

Означення 6. *Якщо для будь-якого власного числа λ матриці A виконується умова $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$ (тобто $E^c = \{0\}$), то система (6), або відповідна динамічна система (7), породжена системою (6), називається* ***гіперболічною*** *(hyperbolic flow).*

Якщо для всіх власних чисел λ матриці A виконується умова $\operatorname{Re}\lambda < 0$ (тобто $E^u = E^c = \{0\}$), то положення рівноваги – точка $0 \in \mathbb{R}^n$ – називається ***стоком*** *(sink).*

Якщо для всіх власних чисел λ матриці A виконується умова $\operatorname{Re}\lambda > 0$ (тобто $E^s = E^c = \{0\}$), то положення рівноваги – точка $0 \in \mathbb{R}^n$ – називається ***джерелом*** *(sourse).*

Приклад 10. *Розглянемо тривимірну систему*

$$\dot{x} = Ax, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Власні числа матриці A :

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm i, \quad \lambda_3 = -3,$$

тобто для всіх власних чисел маємо $\operatorname{Re}\lambda < 0$, а отже, точка $0 \in \mathbb{R}^3$ – сток,

$$E^s = \mathbb{R}^3, \quad E^u = E^c = \{0\}.$$

Поведінка розв'язків системи зображена на Рис. 15.

Означення 7. *Підпростір (лінійна замкнена множина) $E \in \mathbb{R}^n$ називається інваріантним відносно динамічної системи φ, якщо для будь-якого t виконується вкладення $\varphi(t, E) \subset E$*

Зауваження 1. *Насправді має місце рівність $\varphi(t, E) = E$ для всіх t.*

Дійсно, подіємо на вкладення $\varphi(t, E) \subset E$ відображенням $\varphi(-t, \ \cdot\ )$:

$$\varphi\big(-t, \varphi(t, E)\big) \subset \varphi(-t, E).$$

Тоді, оскільки φ задовольняє напівгрупову властивість, то

$$\varphi\big(-t + t, E\big) \subset \varphi(-t, E) \ \Rightarrow \ \varphi(0, E) \subset \varphi(-t, E) \ \Rightarrow \ E \subset \varphi(-t, E).$$

Враховуючи, що t пробігає всю дійсну вісь, отримуємо, що для всіх t : $E \subset \varphi(t, E)$, а звідси маємо рівність $\varphi(t, E) = E$.

Таким чином, нам достатньо для всіх t перевіряти вкладення $\varphi(t, E) \subset$ $\subset E$, але воно автоматично тягне за собою рівність $\varphi(t, E) = E$.

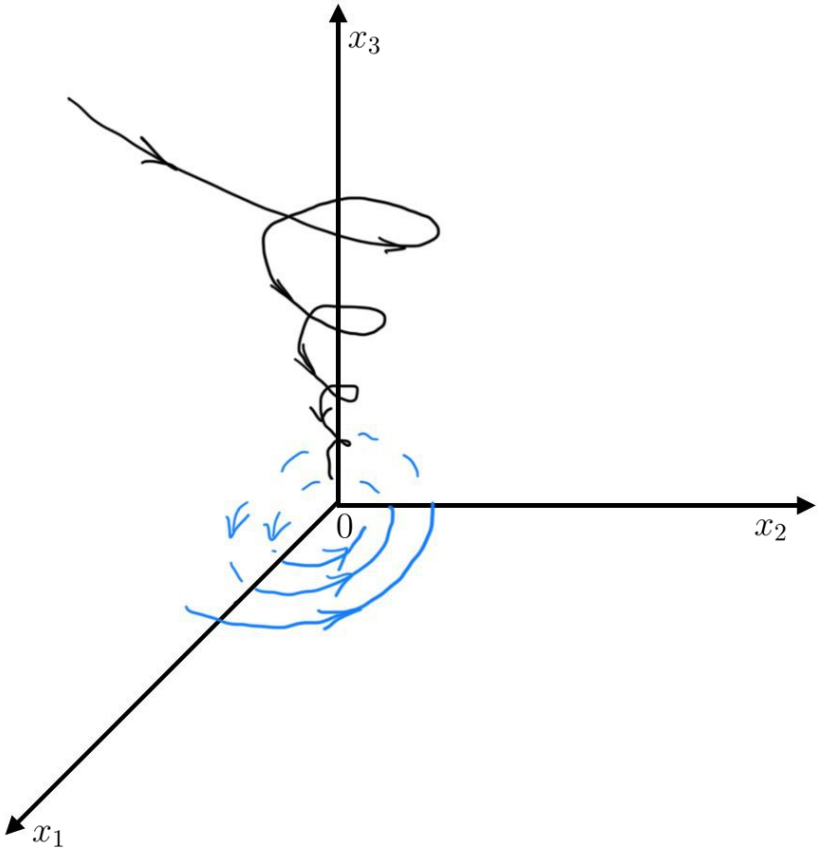


Рис. 15

Твердження 3. *Нехай λ – власне число матриці A кратності $k \geq 1$, $\{v_1, \ldots, v_k\}$ – відповідні узагальнені власні вектори. Нехай $E = \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$. Тоді $AE \subset E$, тобто підпростір E інваріантний щодо матриці A.*

Теорема 6. *Для системи (6) фазовий простір $\mathbb{R}^n$ розбивається на пряму суму підпросторів E^s, E^u, E^c :*

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c,$$

і, крім того, підпростори E^s, E^u, E^c є інваріантними відносно динамічної системи φ, породженої системою диференціальних рівнянь (6).

Нагадаємо, що $X = L \oplus M$ означає, що для будь-якого елементу $x \in X$ однозначно визначені елементи $l \in L$ та $m \in M$ такі, що $x = l + m$.

Доведення. Перше твердження про розбиття на пряму суму - це наслідок того, що узагальнені власні вектори $\{u_j, v_j\}$ утворюють базис в $\mathbb{R}^n$.

Доведемо інваріантність, наприклад, підпростору E^s (для інших підпросторів міркування аналогічні), тобто покажемо, що для довільного t має місце вкладення $\varphi(t, E^s) \subset E^s$.

Візьмемо довільну точку $x_0 \in E^s$. Тоді

$$x_0 = \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot V_j, \quad \text{де} \quad V_j = v_j \quad \text{або} \quad V_j = u_j.$$

Оскільки $\{V_j\}_{j=1}^m$ утворюють базис у E^s, то за твердженням 3 $AE^s \subset E^s$.

Далі, для будь-якого t :

$$e^{At}x_0 = \sum_{j=1}^{m} c_j e^{At} V_j.$$

За означенням експоненти матриці

$$e^{At}V_j = \lim_{k\to\infty} \left[I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \ldots + \frac{A^k t^k}{k!} \right] V_j.$$

Оскільки $AV_j \in E^s$, то для кожного $k \geq 1$ маємо $A^k V_j \in E^s$. Звідси $\left[I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \ldots + \frac{A^k t^k}{k!} \right] V_j \in E^s$ і оскільки E^s замкнена множина, то $e^{At}V_j \in E^s$, але тоді за лінійністю $e^{At}x_0 \in E^s$, тобто $\varphi(t, E^s) \subset E^s$ для кожного t. Теорема доведена. □

Теорема 7. *Наступні твердження еквівалентні:*

(a) $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n,\ x_0 \neq 0 :\quad \lim\limits_{t\to+\infty} \|e^{At}x_0\| = 0, \quad \lim\limits_{t\to-\infty} \|e^{At}x_0\| = \infty;$

(b) для довільного власного числа λ *матриці* A : $\operatorname{Re}\lambda < 0;$

(c) $\exists\, c, d, m, M > 0 \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\left\|e^{At}x_0\right\| \leq Me^{-ct} \cdot \|x_0\|, \quad t \geq 0,$$
$$\left\|e^{At}x_0\right\| \geq me^{-dt} \cdot \|x_0\|, \quad t \leq 0.$$

Доведення. Оскільки розв'язок системи (6) має вигляд

$$x(t) = e^{At}x_0 = P\operatorname{diag}\left[\ldots \underbrace{e^{\lambda_j t}}_{\substack{\text{відповідає} \\ \text{дійсним } \lambda_j}} \ldots \underbrace{e^{a_j t}\begin{pmatrix} \cos b_j t & -\sin b_j t \\ \sin b_j t & \cos b_j t \end{pmatrix}}_{\substack{\text{відповідає} \\ \text{комплексним } \lambda_j}} \ldots \right] P^{-1} \cdot \underbrace{\left[I + Nt + \ldots + \frac{N^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} \right]}_{\text{відповідає кратним } \lambda_j} \cdot x_0$$

Звідси кожна координата кожного розв'язку $x(t)$ системи (6) є лінійною комбінацією функцій $\xi \cdot t^k \cdot e^{at} \cos bt$ або $\xi \cdot t^k \cdot e^{at} \sin bt$, де $\lambda = a + ib$ – власне число матриці A, $\xi = \xi(x_0)$ – стала, для якої виконується оцінка $|\xi| \le c \cdot \|x_0\|$.

Покажемо, що (a) $\Rightarrow$ (b).

Міркуючи від супротивного, припустимо, що твердження (a) виконується, але при цьому для деякого власного числа $\lambda = a + ib$ матриці A його дійсна частина невід'ємна: $a \ge 0$. Тоді для деякого розв'язку (6) принаймні одна координата має вигляд Звідси випливає, що існує таке початкове значення $x_0 \ne 0$, для якого $\|e^{At}x_0\| \nrightarrow 0$, $t \to \infty$, тобто отримали суперечність з (a).

Далі переконаємося, що (b) $\Rightarrow$ (c).

Нехай виконується твердження (b), тобто всі власні числа матриці A мають від'ємні дійсні частини. Тоді якщо кожна координата кожного розв'язку (6) має вигляд $\xi \cdot t^k \cdot e^{at} \cos bt$ або $\xi \cdot t^k \cdot e^{at} \sin bt$ і при цьому $a < 0$, то, наприклад, для $c = d = \dfrac{a}{2}$ маємо:

$$\left\|e^{At}x_0\right\| \le Me^{-ct} \cdot \|x_0\|, \quad t \ge 0,$$
$$\left\|e^{At}x_0\right\| \ge me^{-dt} \cdot \|x_0\|, \quad t \le 0,$$

тобто виконується твердження (c).

Насамкінець бачимо, що імплікація (c) $\Rightarrow$ (a) очевидна. □

Аналогічне твердження справедливе у випадку джерела.

Твердження 4. *Наступні властивості еквівалентні:*

(a) $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n,\ x_0 \ne 0:\quad \lim\limits_{t\to-\infty} \|e^{At}x_0\| = 0, \quad \lim\limits_{t\to+\infty} \|e^{At}x_0\| = \infty;$

(b) для довільного власного числа λ *матриці* A : $\operatorname{Re}\lambda > 0$;

(c) $\exists\, c, d, m, M > 0 \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\left\|e^{At}x_0\right\| \le Me^{ct} \cdot \|x_0\|, \quad t \le 0,$$
$$\left\|e^{At}x_0\right\| \ge me^{dt} \cdot \|x_0\|, \quad t \ge 0.$$

Наслідок 9. *Якщо* $x_0 \in E^s$, *то для довільного* t *маємо* $e^{At}x_0 \in E^s$ *та*

$$\lim_{t\to+\infty} \|e^{At}x_0\| = 0.$$

Якщо $x_0 \in E^u$, *то для довільного* t *маємо* $e^{At}x_0 \in E^u$ *та*

$$\lim_{t\to-\infty} \|e^{At}x_0\| = 0.$$

Завдання 4. *Розв'язати задачу Коші*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Виділити стійкий, нестійкий та центральний підпростори.
З'ясувати: чи є система гіперболічною? чи є початок координат джерелом або стоком?

1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

12) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Тема 6. Лінійні неоднорідні системи

Тепер розглянемо лінійну неоднорідну систему

$$\dot{x} = Ax_b(t), \quad \text{де} \quad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \cdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Означення 8. ***Фундаментальна матриця*** *для системи (6) (fundamental matrix) – це будь-яка невироджена матриця $\Phi(t)$ розмірності $n \times n$, яка задовольняє матричне рівняння*

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = A \cdot \Phi(t).$$

Зауваження 2. *Якщо $\Phi(t)$ – фундаментальна матриця системи (6), а C – довільна невироджена стала матриця розмірності $n \times n$, то матриця $\Phi(t) \cdot C$ також буде фундаментальною матрицею системи (6).*

Серед усіх фундаментальних матриць центральну роль відіграє матрична експонента: $\Phi(t) = e^{At}$ – це фундаментальна матриця системи (6), для якої $\Phi(0) = I$.

Унаслідок єдиності розв'язку задачі Коші для лінійної системи (6) фундаментальна матриця однозначно визначається її значеннням у точці $t = 0$. Таким чином, фундаментальна матриця, для якої $\Phi(0) = I$, визначається однозначно і це матрична експонента e^{At}.

Крім того, оскільки $\Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(0)|_{t=0} = I$, то $\Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(0) = e^{At}$, тобто $\Phi(t) = e^{At} \cdot C$ для деякої невиродженої матриці C, $\det C \neq 0$. Отже, будь-яка фундаментальна матриця виражається через матричну експоненту.

Для подальших досліджень нам буде важлива формула варіації довільних сталих.

Теорема 8 (**формула варіації довільних сталих** (variation of constants formula))**.** *Нехай $\Phi(t)$ – фундаментальна матриця системи (6). Тоді для довільного початкового значення $x_0 \in \mathbb{R}^n$ та для довільної неперервної n-вимірної вектор-функції $b(t)$ задача Коші*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок, який задається формулою

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + \int_0^{t_0} \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau.$$

Наслідок 10. *Для* $\Phi(t) = e^{At}$ *маємо* $\Phi^{-1}(t) = e^{-At}$ *та* $\Phi(0) = I$ *і формула варіацій довільних сталих набуває вигляду*

$$x(t) = e^{At}x_0 + e^{At}\int_0^{t_0} e^{-A\tau}\cdot b(\tau)d\tau = e^{At}\underbrace{\left(x_0 + \int_0^{t_0} e^{-A\tau}\cdot b(\tau)d\tau\right)}_{\text{варіації сталих}}.$$

Тема 7. Нелінійні динамічні системи: загальні факти

Будемо розглядати систему

$$\dot{x} = f(x), \tag{9}$$

де відображення $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ (у лінійному випадку у нас було $f(x) = Ax$), тобто

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \cdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

і (9) можна записати як

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Приклад 11. *Розглянемо двовимірну систему*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \cdot x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2. \end{cases}$$

Зафіксуємо початкові дані

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0$$

і знайдемо розв'язок відповідної задачі Коші.

Очевидно, що система допускає послідовне інтегрування: з другого рівняння знаходимо

$$x_2(t) = x_2^0 \cdot e^t$$

і, підставляючи у перше рівняння приходимо до рівняння з відокремленими змінними

$$\dot{x}_1 = x_1 \cdot x_2^0 e^t,$$

розв'язком якого є функція

$$x_1(t) = x_1^0 e^{x_2^0(e^t - 1)}.$$

Таким чином, динамічна система $\varphi(t, \cdot) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ для $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ має вигляд

$$\varphi(t, c) = \begin{pmatrix} c_1 e^{c_2(e^t - 1)} \\ c_2 e^t \end{pmatrix}.$$

Зауваження 3. *Зазначимо, що для нелінійних систем навіть якщо функція f визначена для всіх $x \in \mathbb{R}^n$ і є неперервною чи навіть гладкою, можлива ситуація, коли розв'язок має вертикальну асимптоту, тобто прямує до $\pm\infty$ за скінчений час (при $t \to t_*$).*

Приклад 12. *Розглянемо задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Розв'язок цієї задачі Коші $x(t) = \dfrac{1}{1-t}$ визначений для $t \in (-\infty, 1)$ та $\lim\limits_{t \to 1-0} = \infty$ – Рис. 16.

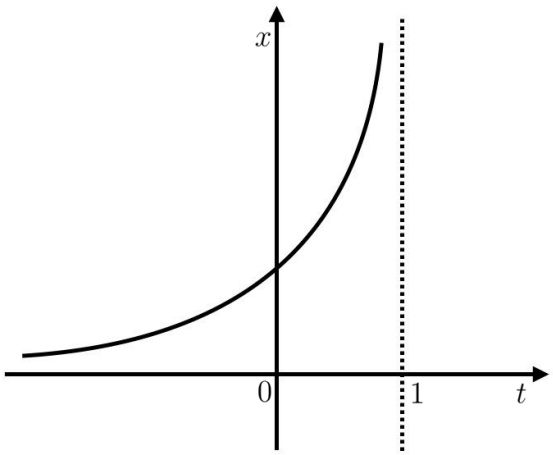


Рис. 16

Поки що формально будемо називати динамічною системою, що породжена системою нелінійних диференціальних рівнянь (9), відображення

$$\varphi(t, c) = x(t, c),$$

де $x(t, c)$ – розв'язок системи (9), який задовольняє початкову умову

$$x(t, 0) = c.$$

Нехай $f \in C^{(1)}(E)$, де $E \subseteq \mathbb{R}^n$ – деяка область (відкрита та зв'язна

множина), тобто для всіх $i, j = \overline{1,n}:\ \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C(E)$. Тоді матриця

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

називається ***матрицею Якобі*** (Jacobian matrix) у точці $x \in E$.

Наприклад, для системи з Прикладу 11:

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow\ Df(x) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \text{зокрема, } Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 9 (про існування та єдиність розв'язку задачі Коші)**.** *Нехай* $f \in$ $\in C^{(1)}(E)$. *Тоді для довільного* $x_0 \in E$ *існує таке число* $a > 0$, *що задача Коші*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0; \end{cases} \tag{10}$$

має єдиний розв'язок на відрізку $[-a; a]$.

Доведення. Ідея доведення полягає у застосування методу послідовних наближень Пікара.

Нехай $x_0 \in E$. Тоді існує таке $b > 0$, що точка x_0 належить області E разом зі своїм замкненим b-околом, тобто

$$N := \{x :\ \|x - x_0\| \le b\} \subset E.$$

Означимо сталі

$$M = \max_{x \in N} \|f(x)\|, \quad L := \max_{x \in N} \|Df(x)\|, \quad a = \min\left\{\frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\}.$$

На відрізку $[-a, a]$ задача Коші (10) еквівалентна системі інтегральних рівнянь

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds,$$

і крім того,

$$\max_{t \in [-a,a]} \|x_k(t) - x(t)\| \to 0 \quad t \to \infty,$$

де $\{x_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ – Пікарівські наближення (successive approximation):

$$x_0(t) \equiv x_0,$$

$$x_1(t) = x_0 + \int_0^t f(x_0)ds = x_0 + f(x_0)t,$$

$$x_2(t) = x_0 + \int_0^t f(x_1(t))ds,$$

$$\vdots$$

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(x_k(t))ds, \quad k \geq 1.$$

Отже, Пікарівські наближення рівномірно збігаються до розв'язку задачі Коші та цей розв'язок єдиний. □

Теорема 10 (залежність розв'язку задачі Коші від початкових даних)**.** *Нехай $f \in C^{(1)}(E)$, $x_0 \in E$. Тоді існує такі числа $a > 0$ та $\delta > 0$, що для всіх $\xi \in N_\delta(x_0) = \{x : \ \|x - x_0\| < \delta\}$ задача Коші*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = \xi; \end{cases}$$

має єдиний розв'язок $x = x(t, \xi)$ на відрізку $[-a; a]$, причому $x \in C^{(1)}(G)$, де $G = [-a, a] \times N_\delta(x_0)$.

Крім того, матриця

$$\psi(t, \xi) := \frac{\partial x(t, \xi)}{\partial \xi}$$

задовольняє систему

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\psi(t, \xi) = Df\big(x(t, \xi)\big) \cdot \psi(t, \xi), \\ \psi(0, \xi) = E - \text{одинична матриця.} \end{cases}$$

Зауваження 4. *Якщо точка x_0 – положення рівноваги системи (9), тобто $f(x_0) = 0$, то $x(t, x_0) \equiv x_0$. Отже, матриця*

$$\psi(t) = \psi(t, x_0) = \left.\frac{\partial x(t, \xi)}{\partial \xi}\right|_{\xi = x_0}$$

задовольняє систему

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\psi(t) = Df(x_0) \cdot \psi(t), \\ \psi(0, \xi) = E. \end{cases}$$

Звідси

$$\psi(t) = e^{Df(x_0) \cdot t}.$$

Приклад 13. *Розглянемо лінійну систему*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = \xi. \end{cases}$$

У випадку лінійної системи $f(x) = Ax$. Тоді $x(t, \xi) = e^{At} \cdot \xi$, а тому

$$\psi(t, \xi) = \frac{\partial x(t, \xi)}{\partial \xi} = e^{At}.$$

Приклад 14. *Розглянемо систему з Прикладу 11*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \cdot x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2. \end{cases}$$

Маємо $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$. У Прикладі 11 ми вже визначили

$$x(t, \xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 \cdot e^{\xi_2 \left(e^t - 1\right)} \\ \xi_2 \cdot e^t \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\psi(t, \xi) = \frac{\partial x(t, \xi)}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} e^{\xi_2 \left(e^t - 1\right)} & \xi_1 \left(e^t - 1\right) e^{\xi_2 \left(e^t - 1\right)} \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, що $\psi(t, \xi)$ дійсно задовольняє матричну задачу Коші:

$$\psi(0, \xi) = \frac{\partial x(t, \xi)}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

крім того, оскільки

$$Df\big(x(t, \xi)\big) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_2 \cdot e^t & \xi_1 \cdot e^{\xi_2 \left(e^t - 1\right)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то легко бачити, що

$$\frac{d}{dt} \psi(t, \xi) = Df\big(x(t, \xi)\big) \cdot \psi(t, \xi).$$

Теорема 11 (про залежність розв'язку задачі Коші від параметрів)**.** *Нехай ми маємо систему*

$$\dot{x} = f(x, \mu),$$

де $f \in C^{(1)}(E)$, причому тепер $E \subseteq R^{n+m}$ – деяка область (m – кількість параметрів), нехай також $(x_0, \mu_0) \in E$. Тоді знайдуться такі $a > 0$ та $\delta > 0$, що для довільних $\xi \in N_\delta(x_0)$ та $\mu \in N_\delta(\mu_0)$ задача Коші

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \mu), \\ x(0) = \xi; \end{cases}$$

має єдиний розв'язок $x = x(t, \xi, \mu) \in C^{(1)}(G)$, *де* $G = (-a, a) \times N_\delta(x_0) \times$ $\times N_\delta(\xi_0)$.

Тепер обговоримо максимальний інтервал існування розв'язку.

Теорема 12. *Нехай* $f \in C^{(1)}(E)$, $x_0 \in E$. *Тоді існує максимальний інтервал існування розв'язку* $x(t)$ *задачі Коші (10)*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0; \end{cases}$$

$I(x_0) = (\alpha, \beta)$, $-\infty \le \alpha \le \beta \le +\infty$, *тобто, якщо* $y(t)$, $t \in J$ *є розв'язком задачі Коші (10), то* $J \subset I(x_0)$ *та* $x(t) \equiv y(t)$ *на* J.

Приклад 15. *Повернемося до задачі Коші з Прикладу 12*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Оскільки $x(t) = \dfrac{1}{1-t}$, то маємо інтервал $I(1) = (-\infty, 1)$, причому $\lim\limits_{t \to 1-0} x(t) = \infty$.

Теорема 13 (про максимальний інтервал системи з правою частиною лінійного росту)**.** *Нехай* $f \in C^{(1)}(\mathbb{R}^n)$ *та існують такі сталі* A, B *такі, що для всіх* $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|f(x)\| \le A \cdot \|x\| + B.$$

Тоді будь-який розв'язок системи

$$\dot{x} = f(x)$$

існує на інтервалі $(-\infty, +\infty)$.

Доведення. Зафіксуємо $T > 0$ і доведемо існування розв'язку на відрізку $[0, T]$. Оскільки справедливе інтегральне представлення розв'язку

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds,$$

то можемо вивести апріорну оцінку

$$\|x(t)\| \le \|x_0\| + \int_0^t \Big(A \cdot \|x\| + B\Big)ds \le \|x_0\| + B \cdot T + \int_0^t A \cdot \|x\|ds.$$

Звідси за лемою Гронуолла

$$\|x(t)\| \le \Big(\|x_0\|\| + B \cdot T\Big) \cdot e^{A \cdot T}.$$

Оскільки в правій частині останньої нерівності стоїть константа, то вона визначена для $t \in [0, T]$, але тоді і функція $x(t)$ також існує на $[0, T]$, а отже, внаслідок довільності T, розв'язок існує на $[0, +\infty)$.

Шляхом заміни $y(t) = x(-t), t \leq 0$, встановлюється існування на $(-\infty, 0]$. □

Означення 9. *Для розв'язку задачі Коші (10) $x(t, x_0)$, де $t \in I(x_0)$ – максимальний інтервал існування цього розв'язку, множина*

$$\Big\{ x(t, x_0) \;\Big|\; t \in I(x_0) \Big\} \in E$$

називається ***траєкторією*** *системи (9), що проходить через точку x_0.*

Приклад 16. *Ще раз повернемося до задачі Коші з Прикладу 12*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Оскільки розв'язок цієї задачі Коші має вигляд $x(t) = \dfrac{1}{1-t}$ і визначений на максимальному інтервалі існування $I(1) = (-\infty, 1)$, то траєкторією цього розв'язку буде множина

$$\left\{ \frac{1}{1-t} \;\middle|\; t \in (-\infty, 1) \right\} = (0, +\infty).$$

На Рис. 17 праворуч синім кольором зображена відповідна траєкторія та вказаний напрям руху по ній.

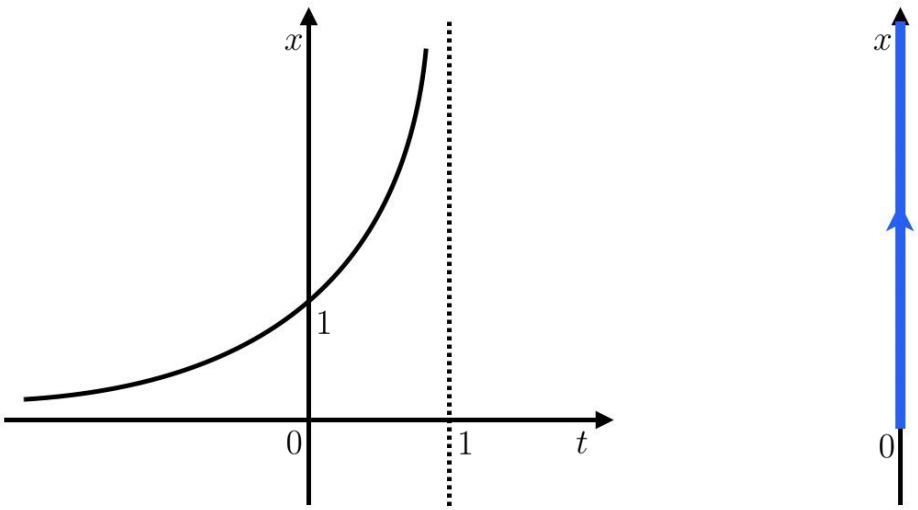


Рис. 17

З точки зору теорії динамічних систем для нас основний інтерес складають саме траєкторії системи. При цьому було б зручно вважати, що максимальний інтервал існування будь-якого розв'язку співпадає з усією дійсною віссю, тобто $I(x_0) = \mathbb{R}$ для кожного x_0. Цього можна досягти за допомогою процедури перемасштабування (rescaling).

Для початку подивимось, як це працює на наступному прикладі.

Приклад 17. *Поряд із задачею Коші з Прикладів 12, 15, 16 розглянемо наступну задачу Коші.*

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x^2}{1+x^2}, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Розв'язок цієї задачі Коші

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(t + \sqrt{t^2+4}\right)$$

може бути знайдений безпосередньо відокремленням змінних. Очевидно, що цей розв'язок визначений на вій дійсній осі $\mathbb{R}$. Крім того, права частина рівняння задовольняє Теорему 13, оскільки $\left|\dfrac{x^2}{1+x^2}\right| \leq 1$.

Зупинимеся більш детально на поведінці розв'язку $x(t)$.

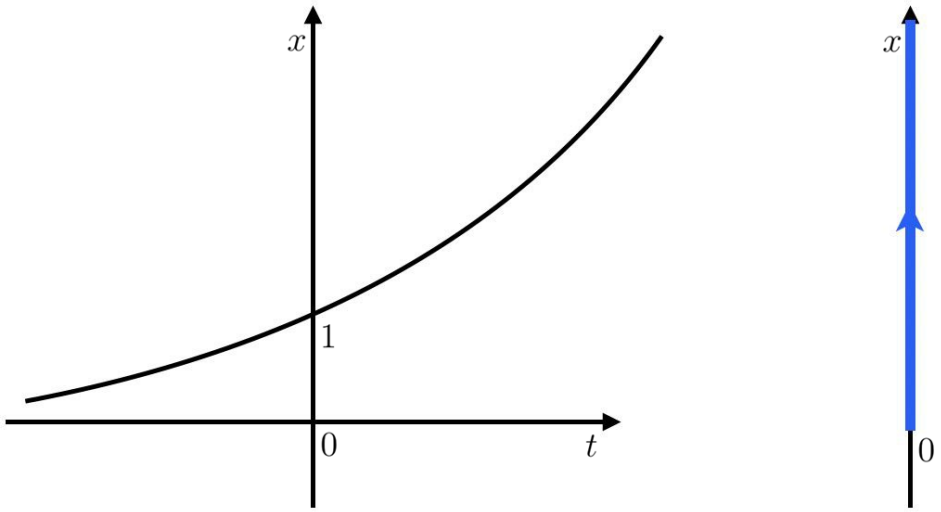


Рис. 18

Оскільки права частина рівняння додатня, то функція $x(t)$ строго монотонно зростає, і при цьому

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2}\left(t + \sqrt{t^2+4}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{2}\left(t + \sqrt{t^2+4}\right) = \frac{1}{2}\lim_{t\to-\infty} \frac{4}{\left(\sqrt{t^2+4}\right) - t} = 0,$$

то траєкторія розв'язку – це інтервал $(0, +\infty)$ – Рис. 18.

Отже, в Прикладах 16 і 17 траєкторії та напрям руху вздовж траєкторій співпадають.

Твердження 5. *Для $f \in C^{(1)}(\mathbb{R}^n)$ розв'язки системи*

$$\dot{x} = \frac{f(x)}{1 + \|f(x)\|}$$

існують на всій дійсній осі $(\infty, +\infty)$.

Доведення. Оскільки

$$\left\| \frac{f(x)}{1 + \|f(x)\|} \right\| \leq 1,$$

то права частина системи має не більш як лінійний ріст, тобто виконуються умови Теореми 13. □

Теорема 14. *Нехай $f \in C^{(1)}(\mathbb{R}^n)$. Тоді системи*

$$\dot{x} = f(x) \tag{11}$$

і

$$\dot{x} = \frac{f(x)}{1 + \|f(x)\|} \tag{12}$$

мають одні і ті самі траєкторії з одним і тим самим напрямом руху вздовж цих траєкторій, тобто системи (11) і (12) топологічно еквівалентні.

Зауваження 5. *Процедура переходу від системи (11) до системи (12) називається* ***"rescaling"****.*

Доведення. Нехай $x(t)$, $t \in I(x_0) = (\alpha, \beta)$, – розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Введемо нову незалежну змінну за правилом

$$\tau = \int_0^t \left(1 + \|f(x(s))\|\right), \ \tau = \tau(t).$$

Функція $\tau = \tau(t)$ має властивості:

$$\tau(0) = 0, \quad \tau'(t) > 0, \quad \tau : (\alpha, \beta) \to (-\infty, +\infty).$$

Отже, існує обернена функція $t = t(\tau)$ до функції $\tau = \tau(t)$ така, що $t(0) = 0$, $t \in C^{(1)}$.

Покладемо

$$y(\tau) := x(t(\tau)),\ \tau \in (-\infty, +\infty).$$

Тоді

$$\{y(\tau) \mid \tau \in (-\infty, +\infty)\} = \{x(t) \mid t \in (\alpha, \beta)\},$$

$y(0) = x_0$, і, крім того,

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{dx(t(\tau))}{d\tau} = \frac{dx(t(\tau))}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = f(x(t(\tau))) \cdot \frac{1}{\dfrac{dt}{d\tau}} =$$

$$= f(x(t(\tau))) \cdot \frac{1}{1 + \left\| f(x(t(\tau))) \right\|} = f(y(\tau)) \cdot \frac{1}{1 + \left\| f(y(\tau)) \right\|},$$

тобто $y(\tau)$ є розв'язком системи (12), у якого співпадають траєкторії з відповідним розв'язком $x(t)$ системи (11). □

Надалі вважаємо, то така процедура до системи (11) вже застосована, тобто вважаємо, що для системи

$$\dot{x} = f(x) \tag{13}$$

з $f \in C^{(1)}(E)$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$, для довільного початкового значення $x_0 \in E$ для розв'язку $x(t, x_0)$ максимальний інтервал існування $I(x_0) = (-\infty, +\infty)$. Позначимо

$$\varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0) = x(t, x_0).$$

Означення 10. $\{\varphi_t : E \to E\}_{t \in \mathbb{R}}$ *називається* ***потоком*** *(flow) або* ***динамічною системою****, що породжується (13).*

Множина $\{\varphi_t(x_0)\} \subset E$ *називається* ***траєкторією****, що проходить через точку* x_0.

Теорема 15 (про властивості потоку)**.** *Справедливі властивості:*

1) $\varphi \in C^{(1)}(\mathbb{R} \times E)$;

2) *для довільних* $t, s \in \mathbb{R}$ *та* $x_0 \in E$ *виконується напівгрупова властивість*

$$\varphi_{t+s}(x_0) = \varphi_t\big(\varphi_s(x_0)\big).$$

Доведення. Перша властивість є наслідком теорем про диференційовну залежність. Оскільки відображення $(t, \xi) \mapsto x(t, \xi)$ належить класу $C^{(1)}$ внаслідок Теореми 10 про диференційовність розв'язку від початкових даних, то $\varphi \in C^{(1)}(\mathbb{R} \times E)$.

Доведемо другу властивість.

Для цього зафіксуємо $s \in \mathbb{R}$ і покладемо

$$x_s(t) := x(t+s, x).$$

Тоді $x_s(0) = x(s, x_0)$,

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = \frac{dx(t+s)}{dt} = f(x(t+s)) = f(x_s(t)).$$

Отже, внаслідок єдиності розв'язку задачі Коші

$$\begin{array}{rcl} x_s(t) & = & x(t, x_s(0)) = \varphi_t(\varphi_s(x_0)) \\ \| & & \\ x(t+s, x_0) & = & \varphi_{t+s}(x_0). \end{array}$$

□

Означення 11. *Множина $S \subset E$ називається* ***інваріантною*** *відносно потоку φ_t (invariant with respect to φ_t), якщо для довільного $t \in \mathbb{R}$ виконується $\varphi_t(S) \subset S$ (звідси, зокрема, випливає, що $\varphi_t(S) = S$).*

S називається ***додатно (від'ємно) інваріантною****, якщо*

$$\varphi_t(S) \subset S \quad \forall\, t > 0 \quad (\forall\, t < 0).$$

Означення 12. *Точка $\bar{x} \in E$ називається* ***точкою рівноваги*** *(equilibrium point), якщо $f(\bar{x}) = 0$.*

Це означає, що для кожного $t \in \mathbb{R}$: $x(t, \bar{x}) = \bar{x}$ – ***стаціонарний розв'язок****.*

У цьому випадку $S = \{\bar{x}\}$ інваріантна множина та $\bar{x}$ – ***нерухома точка*** *для φ_t, тобто*

$$\varphi_t(\bar{x}) = \bar{x} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Приклад 18. *Розглянемо систему*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2. \end{cases}$$

Зрозуміло, що єдиним положенням рівноваги є точка $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Для знаходження всіх інших розв'язків послідовно розв'яжемо систему:

$$x_1(t) = x_1^0 \cdot e^{-t}.$$

Підставляючи у друге рівняння, отримуємо лінійне неоднорідне рівняння

$$\dot{x}_2 = x_2 + \left(x_1^0\right)^2 \cdot e^{-2t},$$

розв'язок якого має вигляд

$$x_2(t) = x_2^0 \cdot e^t + \frac{\left(x_1^0\right)^2}{3} \cdot \left(e^t - e^{-2t}\right).$$

Отже, динамічна система $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ для $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ має вигляд

$$\varphi(t, c) = \varphi_t(c) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^t + \dfrac{c_1^2}{3}\left(e^t - e^{-2t}\right) \end{pmatrix}.$$

За аналогією з лінійними динамічними системами, стійкий многовид – це множина S така, що S – інваріантна та

$$\forall\, c \in S: \quad \varphi_t(c) \to 0, \quad t \to +\infty.$$

А нестійкий многовид – це множина U така, що U – інваріантна та

$$\forall\, c \in U: \quad \varphi_t(c) \to 0, \quad t \to -\infty.$$

Визначимо S і U для $\varphi_t(c)$ з нашого прикладу. Оскільки

$$\varphi(t, c) = \varphi_t(c) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ \left(c_2 + \dfrac{c_1^2}{3}\right) e^t - \dfrac{c_1^2}{3} e^{-2t} \end{pmatrix},$$

то $\varphi_t(c) \to 0,\ t \to +\infty$, якщо

$$c_2 = -\frac{c_1^2}{3},$$

і $\varphi_t(c) \to 0,\ t \to -\infty$, якщо

$$c_1 = 0.$$

Позначимо

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = -\frac{x_1^2}{3} \right\},$$

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0 \right\}.$$

Тоді

$$\forall\, c \in S: \quad \varphi_t(c) \to 0, \quad t \to +\infty;$$

$$\forall\, c \in U: \quad \varphi_t(c) \to 0, \quad t \to -\infty.$$

Покажемо, що множини S і U інваріантні відносно потоку φ_t.

Для $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in S$ означає, що $c_2 = -\dfrac{c_1^2}{3}$, тоді для кожного t маємо

$$\varphi_t(c) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ -\dfrac{c_1^2}{3} e^{-2t} \end{pmatrix},$$

тобто $\dfrac{x_1^2}{3} = -x_2$, а тому $\varphi_t(c) \in S$, отже, S – інваріантна.

Аналогічно для $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in U$ маємо $c_1 = 0$, тоді для кожного t :

$$\varphi_t(c) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 e^{t} \end{pmatrix},$$

тобто $x_1 = 0$, а тому $\varphi_t(c) \in U$, отже, U – також інваріантна.

Фазовий портрет цієї системи зображений на Рис. 19.

Таким чином, для даного прикладу S – стійкий многовид (зображений синім кольором на 19), а U – нестійкий многовид (зображений червоним кольором).

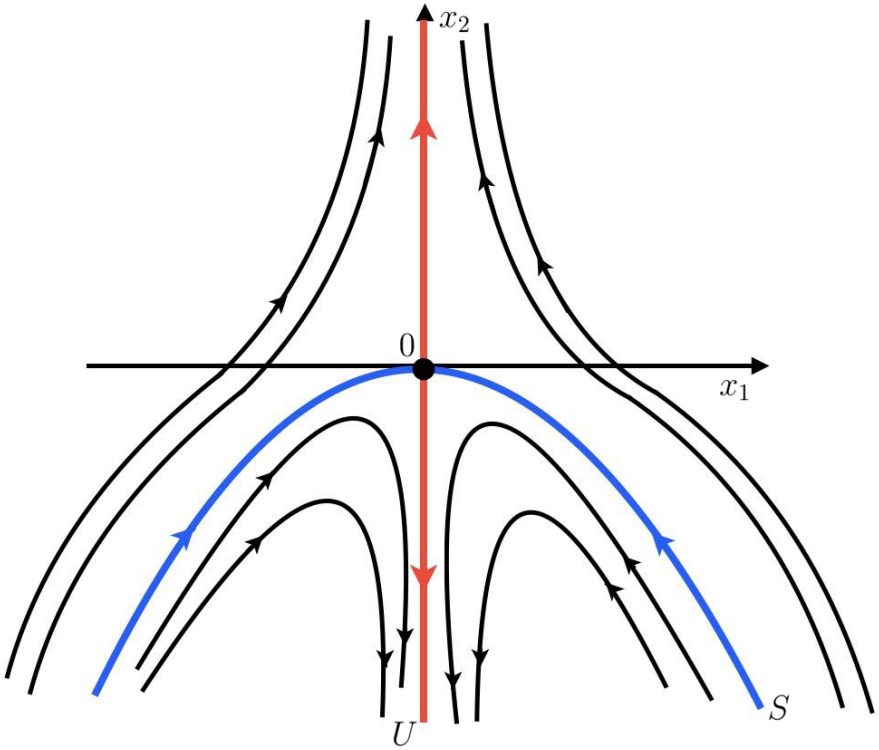


Рис. 19

Завдання 5. *Знайти динамічну систему, що породжується системою диференціальних рівнянь $\dot{x} = f(x)$, виходячи з явного вигляду потоку, знайти інваріантні множини, а також стійкий і нестійкий многовиди.*

1) $f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -x_2 + x_1^2 \\ -x_3 + x_1^4 \end{pmatrix}$;

2) $f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 + x_1^3 \\ x_3 + x_1^2 \end{pmatrix}$;

3) $f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -2x_2 + x_1^3 \\ 3x_3 + x_1^2 \end{pmatrix}$;

4) $f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ 2x_2 + x_1^2 \\ -x_3 + x_1^4 \end{pmatrix}$;

5) $f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 + x_1^2 \\ 2x_3 + x_1^3 \end{pmatrix}$;

6) $f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ 2x_2 + x_1^3 \\ -3x_3 + x_1^2 \end{pmatrix}$;

7) $f(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -x_2 + x_1^3 \\ 2x_3 + x_1^2 \end{pmatrix}$;

8) $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_2 + x_1^2 \\ -x_3 + x_1^3 \end{pmatrix}$;

9) $f(x) = \begin{pmatrix} -3x_1 \\ -2x_2 + x_1^2 \\ x_3 + x_1^2 \end{pmatrix}$;

10) $f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -4x_2 + x_1^3 \\ x_3 + x_1^4 \end{pmatrix}$;

11) $f(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -3x_2 + x_1^2 \\ 2x_3 + x_1^2 \end{pmatrix}$;

12) $f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -2x_2 + x_1^4 \\ 3x_3 + x_1^3 \end{pmatrix}$.

Тема 8. Нелінійні динамічні системи: лінеаризація

Продовжуємо досліджувати нелінійну систему

$$\dot{x} = f(x) \tag{14}$$

з функцією $f \in C^{(1)}$, розв'язки якої визначені при $t \in (-\infty, +\infty)$ (інакше – застосовуємо процедуру rescaling).

Система (14) породжує нелінійну динамічну систему $\varphi(t, c) = \varphi_t(c)$.

Нехай $\bar{x}$ – положення рівноваги системи (14), тобто $f(\bar{x}) = 0$, тоді $x(t) \equiv \bar{x}$ – стаціонарний розв'язок системи: $\varphi(t, \bar{x}) = \bar{x}$ для всіх t.

Означимо матрицю

$$A = Df(\bar{x})$$

і розглянемо лінійну систему

$$\dot{x} = Ax. \tag{15}$$

Система (15) називається ***лінеаризованою (або системою першого наближення)*** для системи (14) в околі точки $\bar{x}$ (*linearization*).

Означення 13. *Нерухома точка $\bar{x}$ називається* ***гіперболічною*** *(hyperbolic) для нелінійної системи (14), якщо для довільного власного числа λ матриці A його дійсна частина ненульова:*

$$\forall \lambda \text{ – власне число матриці } A: \ \operatorname{Re}\lambda \neq 0.$$

Нерухома точка $\bar{x}$ називається ***стоком*** *(sink) для нелінійної системи (14), якщо для довільного власного числа λ матриці A його дійсна частина від'ємна:*

$$\forall \lambda \text{ – власне число матриці } A: \ \operatorname{Re}\lambda < 0.$$

Нерухома точка $\bar{x}$ називається ***джерелом*** *(source) для нелінійної системи (14), якщо для довільного власного числа λ матриці A його дійсна частина додатна:*

$$\forall \lambda \text{ – власне число матриці } A: \ \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

Нерухома точка $\bar{x}$ називається ***сідлом*** *(source) для нелінійної системи (14), якщо ця точка гіпеболічна, тобто $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$ для довільного власного числа λ матриці A, та серед власних чисел матриці A знайдеться як додатнє, так і від'ємне, тобто*

$$\exists \lambda_-, \lambda_+ \text{ – власні числа матриці } A: \ \operatorname{Re}\lambda_- < 0, \ \operatorname{Re}\lambda_+ > 0.$$

Приклад 19. *Повернемося до системи, що розглядалась у Прикладі 18*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2; \end{cases} \tag{16}$$

і розглянемо нерухому точку $x = 0$.

Тоді матриця

$$A = Df(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2x_1 & 1 \end{pmatrix}\Big|_{x_1=x_2=0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

має власні числа $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, тобто точка $x = 0$ є сідлом.

Пізніше побачимо (Теорема Хартмана – Гробмана), що якщо $\bar{x}$ – гіперболічна нерухома точка, то локальна (!!!) поведінка траєкторій нелінійної системи (14) топологічно еквівалентна поведінці траєкторій системи (15), тобто існують окіли $N(\bar{x})$ точки $\bar{x}$ та $N(0)$ точки 0, а також існує неперервне взаємнооднозначне (one-to-one) відображення

$$H : N(\bar{x}) \mapsto N(0),$$

яке переводить (зберігаючи напрям руху) траєкторії системи (14) у траєкторії системи (15).

Повернемося до системи (15) з Прикладів 18, 19 і розглянемо відображення $H : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, яке для $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ визначене наступним чином:

$$H(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + \dfrac{x_1^2}{3} \end{pmatrix}.$$

Покажемо, що H – бієкція, тобто взаємнооднозначне відображеннння.

Розглянемо рівняння $H(x) = y$ і покажемо, що воно має розв'язок для довільних y :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + \dfrac{x_1^2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2 - \dfrac{y_1^2}{3}. \end{cases}$$

Отже, H – бієкція та, крім того, неперервне відображення.

Якщо $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ – розв'язок системи (15), то для $y = H(x)$ маємо

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 + \dfrac{2}{3}\dot{x}_1 \cdot x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1^2 + x_2 - \dfrac{2}{3}x_1^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 + \dfrac{x_1^2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = Ay.$$

Таким чином, відображення H переводить траєкторії нелінійної системи (15) у траєкторії відповідної лінеаризованої системи з матрицею A.

Проілюструємо це на Рис. 20.

Траєкторії нелінійної системи (15) ми вже зображали на Рис. 19.

Для лінійної системи з матрицею A фазовим портретом буде сідлом, оскільки ця матриця має два дійсні власні числа різних знаків: $\lambda_1 = -1$ та $\lambda_2 = 1$. Відповідні власні вектори $s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ та $s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ визначають стійкий та нестійкий підпростори E^s та E^u, які співпадають з віссю $0y_1$ та $0y_2$ відповідно.

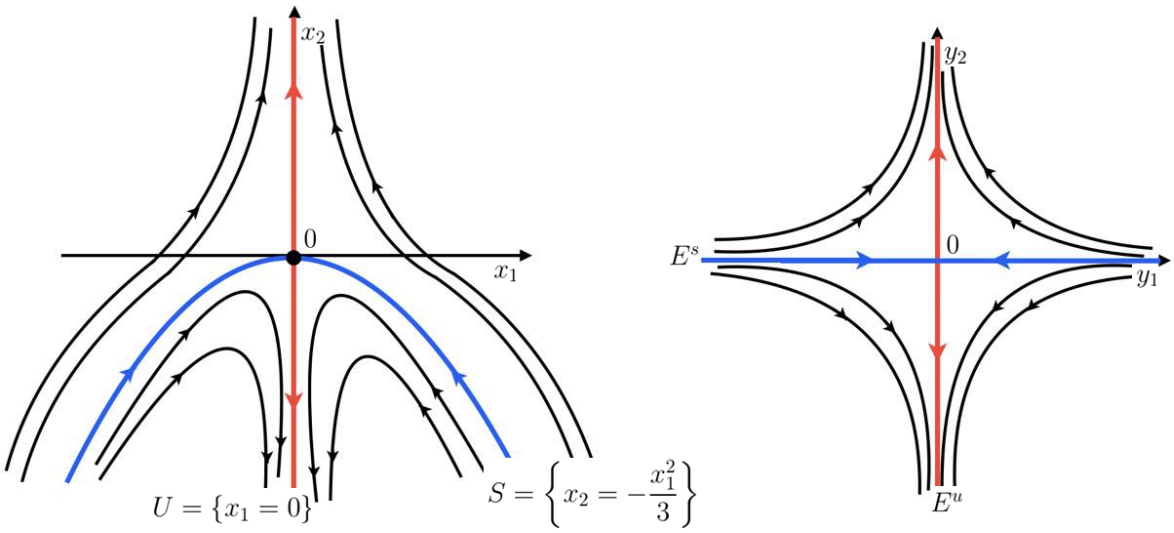


Рис. 20

З Рис. 20 ми бачимо, що у точці 0 стійкий підпростір лінеаризованої системи E^s (координатна вісь $0y_1$, зображена на рисунку праворуч синім кольором) дотикається до стійкого многовиду S нелінійної системи (парабола, зображена синім кольором на рисунку ліворуч). Аналогічно до нестійкого многовиду U дотикається нестійкий підпростір E^u лінеаризованої системи (але у нашому прикладі нестійкий многовид U співпадає з нестійким підпростором E^u). Це і становить твердження теореми про стійкий многовид.

Теорема 16 (про стійкий многовид (попереднє формулювання) (Stable manifold Theorem)). *Нехай нелінійна система (14) має гіперболічну нерухому точку $\bar{x}$ та A – матриця відповідної лінеаризованої системи (15). Тоді в околі точки $\bar{x}$ для системи (14) існують стійкий многовид S та*

нестійкий многовид U, дотичні у точці $\bar{x}$ відповідно до стійкого підпростору E^s та нестійкого підпростору E^u відповідної лінеаризованої системи (15), причому

$$\dim S = \dim E^s, \quad \dim U = \dim E^u,$$

та, крім того,

$$\forall\, t \geq 0 :\ \varphi_t(S) \subset S, \qquad \forall\, t \leq 0 :\ \varphi_t(U) \subset U;$$
$$\forall\, c \in S :\ \varphi_t(c) \to \bar{x}, \quad t \to +\infty;$$
$$\forall\, c \in U :\ \varphi_t(c) \to \bar{x}, \quad t \to -\infty.$$

Приклад 20. *Розглянемо положення рівноваги $\bar{x} = 0$ тривимірної системи*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1^2; \\ \dot{x}_3 = x_3 + x_1^2. \end{cases}$$

Матриця лінеаризованої системи у цьому випадку має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

і її власні числа $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$, тобто $\operatorname{Re}\lambda_i \neq 0$.

Отже, нерухома точка $\bar{x} = 0$ є гіперболічною та, крім того, вона є сідлом.

Знайдемо власні вектори.

Для власних чисел $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 < 0$ власними векторами будуть $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, а тому стійкий підпростір – це підпростір породжений цими векторами, тобто площина $0x_1x_2$:

$$E^s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = 0x_1x_2.$$

Для власного числа $\lambda_3 = 1 > 0$ власний вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, а тому нестійкий підпростір – це підпростір породжений цим вектором, тобто вісь $0x_3$:

$$E^u = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = 0x_3.$$

Побудуємо динамічну систему для вихідної нелінійної системи.

Для початкового значення $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ послідовно інтегруючи отримуємо:

$$x_1(t) = c_1 e^{-t} \;\Rightarrow\; \dot{x}_2 = -x_2 + c_1^2 e^{-2t} \;\Rightarrow\; x_2(t) = c_2 e^{-t} + c_1^2\big(e^{-t} - e^{-2t}\big) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \dot{x}_3 = x_3 + c_1^2 e^{-2t} \;\Rightarrow\; x_3(t) = c_3 e^{t} + \frac{c_1^2}{3}\big(e^{t} - e^{-2t}\big).$$

Отже, отримуємо динамічну систему $\varphi_t : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$

$$\varphi_t(c) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^{-t} + c_1^2\big(e^{-t} - e^{-2t}\big) \\ c_3 e^{t} + \frac{c_1^2}{3}\big(e^{t} - e^{-2t}\big) \end{pmatrix}.$$

Знайдемо стійкий та нестійкий многовиди.

Розглянемо третю координату виразу для φ_t :

$$c_3 e^t + \frac{c_1^2}{3}e^t - \frac{c_1^2}{3}e^{-2t} = e^t\left(c_3 + \frac{c_1^2}{3}\right) - \frac{c_1^2}{3}e^{-2t}.$$

Тоді, якщо

$$c_3 + \frac{c_1^2}{3} = 0,$$

то $\varphi_t(c) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Отже,

$$S = \left\{ c \in \mathbb{R}^3 \mid c_3 = -\frac{c_1^2}{3} \right\}.$$

Далі $\varphi_t(c) \to 0$ при $t \to -\infty$, якщо

$$c_1 = c_2 = 0.$$

Отже,

$$U = \big\{ c \in \mathbb{R}^3 \mid c_1 = c_2 = 0 \big\}.$$

Як бачимо, $U = E^u$, тобто U дотикається до E^u в точці 0.

Перевіримо чи дотикається S до E^s в точці 0.

З курсу диференціальної геометрії відомо, що якщо поверхня в $\mathbb{R}^3$ задається рівнянням $F(x_1, x_2, x_3) = 0$, то дотична площина до цієї поверхні в точці $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix}$ визначається рівністю

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(\bar{x})\big(x_1 - \bar{x}_1\big) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(\bar{x})\big(x_2 - \bar{x}_2\big) + \frac{\partial F}{\partial x_3}(\bar{x})\big(x_3 - \bar{x}_3\big) = 0.$$

У нашому випадку $F(c_1, c_2, c_3) = c_3 + \dfrac{c_1^2}{3} = 0$, $\bar{c} = 0$. Тоді дотична площина

$$\frac{\partial F}{\partial_1}(0)c_1 + \frac{\partial F}{\partial_2}(0)c_2 + \frac{\partial F}{\partial_3}(0)c_3 = 0,$$

$$\frac{2}{3}c_1\Big|_{c_1=0} + 0 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3 = 0.$$

Отже, отримуємо площину $c_3 = 0$, тобто площину $0c_1c_2 = E^s$.

Таким чином, стійкий многовид S у точці 0 в якості дотичної площини дійсно має стійкий підпростір E^s лінеаризованої системи.

Завдання 6. *Знайти та розкласифікувати положення рівноваги нелінійної системи диференціальних рівнянь* $\dot{x} = f(x)$, *де функція* $f(x)$:

1) $f(x) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ 2x_1 - x_2 - x_1x_3 \\ x_1x_2 - x_3 \end{pmatrix}$;

2) $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - 5x_1 + x_1x_3 \\ x_3 - x_1x_2 \end{pmatrix}$;

3) $f(x) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ 10x_1 - x_2 - x_1x_3 \\ x_1x_2 - x_3 \end{pmatrix}$;

4) $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - 2x_1 + x_1x_3 \\ x_3 - x_1x_2 \end{pmatrix}$;

5) $f(x) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ 5x_1 - x_2 - x_1x_3 \\ x_1x_2 - x_3 \end{pmatrix}$;

6) $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - 10x_1 + x_1x_3 \\ x_3 - x_1x_2 \end{pmatrix}$;

7) $f(x) = \begin{pmatrix} 2x_2 - x_1 - x_2x_3 \\ x_1 - x_2 \\ x_1x_2 - x_3 \end{pmatrix}$;

8) $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2x_3 \\ x_2 - 5x_3 + x_1x_3 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix}$;

9) $f(x) = \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ x_1x_3 - x_2 \\ 10x_1 - x_3 - x_1x_2 \end{pmatrix}$;

10) $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2x_3 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 - 2x_2 + x_1x_2 \end{pmatrix}$;

11) $f(x) = \begin{pmatrix} 5x_3 - x_1 - x_2x_3 \\ x_1x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$;

12) $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 10x_2 + x_2x_3 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_1x_2 \end{pmatrix}$.

Тема 9. Теорема про стійкий многовид

Спочатку дамо строге означення многовиду.

Означення 14. *Нехай (X, ρ) – метричний простір, $A, B \subset X$ – деякі множини.*

Відображення $h : A \mapsto B$ називається ***гомеоморфізмом****, якщо h – бієкція, неперервне відображення та обернене відображення h^{-1} теж є неперервним.*

Множини A та B у цьому випадку називається ***гомеоморфними*** *або* ***топологічно еквівалентними****.*

Метричний простір X називається ***зв'язним***, якщо не існує таких відкритих множин A і B, для яких: $A \cap B = \emptyset$, $X = A \cup B$.

Означення 15. *m-**мірний (гладкий) многовид*** *M – це зв'язний метричний простір, у якого існує відкрите покриття $\{U_\alpha\}$ $M = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ таке, що:*

1) для будь-якого α існує гомеоморфізм $h_\alpha : U_\alpha \mapsto \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| < 1\}$;

2) якщо $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, то відображення $h = h_\alpha\big(h_\beta^{-1}\big) \in C^{(1)}$ та для всіх $x \in h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) : \det Dh(x) \neq 0$.

Таким чином, будь-яка точка m-мірного многовиду має окіл, який гомеоморфний відкритій кулі в $\mathbb{R}^m$.

Приклад 21. *Будь-який інтервал (a, b) гомеоморфний прямій.*

Дійсно, розглянемо відображення $h : (a, b) \mapsto (-\infty, \infty)$ визначене формулою

$$h(x) = \frac{1}{a - x} + \frac{1}{b - x}\,.$$

Тоді

$$\lim_{x \to a+0} h(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to b-0} h(x) = +\infty$$

і, крім того,

$$h'(x) = \frac{1}{(a - x)^2} + \frac{1}{(b - x)^2} > 0.$$

Отже, h – неперервна бієкція та обернене відображення h^{-1} також неперервне, тобто h – гомеоморфізм.

Приклад 22. *Розглянемо множину*

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = -\frac{x_1^2}{3} \right\}.$$

Тоді S – гомеоморфна осі $0x_1$.

Дійсно, встановимо гомеоморфізм $h : S \mapsto 0x_1$ за правилом (Рис. 21):

$$h(x) = h(x_1, x_2) = x_1.$$

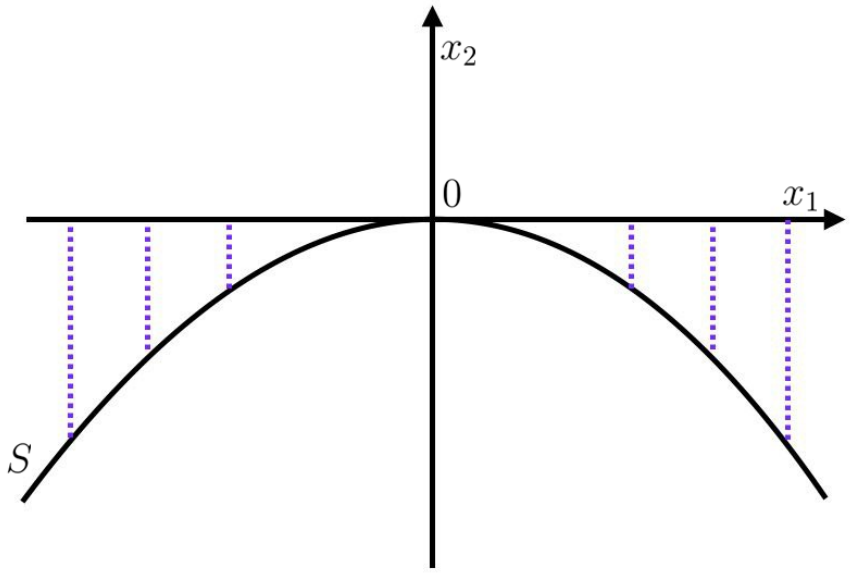


Рис. 21

Оскільки (Приклад 21) вісь $0x_1$ гомеоморфна інтервалу $(-1, 1)$, тобто кулі радіуса 1 в $\mathbb{R}$, то S – одномірний гладкий многовид.

Зауваження 6. *Для нас важливими будуть многовиди, що задаються наступним співвідношенням*

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_k = \psi_k(x_1, \ldots, x_m),\ k = \overline{m+1, n} \right\},$$

де $\psi_k \in C^{(1)}$ *– бієкція. Тоді* M *– m-мірний гладкий многовид.*

Приклад 23. *Розглянемо множину в просторі* $\mathbb{R}^3$:

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_3 = -\frac{x_1^2}{3} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_2 = x_2,\ x_3 = -\frac{x_1^2}{3} \right\}.$$

M *– двовимірний гладкий многовид.*

Теорема 17 (про стійкий многовид (Stable manifold theorem))**.** *Розглянемо систему*

$$\dot{x} = f(x), \tag{17}$$

де $f \in C^{(1)}(E)$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $0 \in E$, $f(0) = 0$.

Нехай $\{\varphi_t : E \mapsto E\}_{t\in\mathbb{R}}$ *– динамічна система (потік), породжений системою (17), нехай* $A = Df(0)$ *– матриця першого наближення, і поряд з системою (17) розглянемо відповідну лінеаризовану систему*

$$\dot{x} = Ax. \tag{18}$$

Припустимо, що точка 0 *– гіперболічна (тобто для кожного власного числа* λ *матриці* A *виконується* $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$*), і нехай матриця* A *має* k *власних чисел з додатною дійсною частиною та* $n-k$ *власних чисел з від'ємною дійсною частиною.*

Тоді існує k*-мірний гладкий многовид* S*, дотичний в точці* 0 *до стійкого підпростору* E^s *системи (18), крім того, цей многовид інваріантний, тобто*

$$\varphi_t(S) \subset S \text{ для всіх } t \geq 0,$$

і для кожного початкового значення $x_0 \in S$ *маємо*

$$\forall x_0 \in S: \quad \lim_{t\to+\infty} \varphi_t(x_0) = 0.$$

S *– це* ***стійкий многовид*** *системи (17).*

Аналогічно існує $(n-k)$*-мірний гладкий многовид* U*, дотичний в точці* 0 *до стійкого підпростору* E^u *системи (18), крім того, цей многовид інваріантний, тобто*

$$\varphi_t(U) \subset U \text{ для всіх } t \geq 0,$$

і для кожного початкового значення $x_0 \in U$ *маємо*

$$\forall x_0 \in U: \quad \lim_{t\to+\infty} \varphi_t(x_0) = +\infty.$$

U *– це* ***нестійкий многовид*** *системи (17).*

Перед доведенням теореми введемо певні конструкції, що дозволять спростити подальші міркування.

1) Завжди можна вважати (з точністю до невиродженого перетворення), що матриця A зведена до певного вигляду, а саме існує така невироджена матриця C, $\det C \neq 0$ така, що

$$B = C^{-1}AC = \operatorname{diag}[P, Q] = \begin{pmatrix} P & \mathbb{O}_1 \\ \mathbb{O}_2 & Q \end{pmatrix},$$

де матриця P – матриця розмірності $k \times k$, власні числа якої $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ мають від'ємні дійсні частини: $\operatorname{Re}\lambda_i < 0,\ i = \overline{1,k}$; матриця Q – матриця розмірності $(n-k)\times(n-k)$, власні числа якої $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n$ мають

додатні дійсні частини: $\operatorname{Re}\lambda_i > 0,\ i = \overline{k+1,n}$; $\mathbb{O}_1$ та $\mathbb{O}_2$ – матриці розмірності $k \times (n-k)$ та $(n-k) \times k$ відповідно, всі елементи яких нульові. Цього можна досягнути зведенням до жорданової нормальної форми.

2) Систему (17) можна записати у формі

$$\dot{x} = Ax + F(x),$$

де $A = Df(0)$, а F задовольняє умову Ліпшиця з як завгодно малою сталою Ліпшиця

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \quad \|x\| < \delta,\ \|y\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|F(x) - F(y)\| < \varepsilon \|x - y\|.$$

Дійсно, покладемо $F(x) = f(x) - Ax$. Тоді

$$F(0) = 0, \quad DF(0) = Df(0) - A = 0,$$

тому оскільки $F \in C^{(1)}$, то $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, \delta > 0$ таке, що для $\|x\| < \delta,\ \|y\| < \delta$ маємо

$$\|F(x) - F(y) - \underbrace{DF(0)}_{=0}(x - y)\| < \varepsilon \|x - y\|.$$

Таким чином, можемо замість вихідної системи розглядати систему вигляду

$$\dot{y} = By + G(y), \tag{19}$$

де B – матриця розмірності $n \times n$ блочно-діагональної структури:

$$B = \operatorname{diag}\big[P, Q\big] = \begin{pmatrix} \overbrace{P}^{k\times k} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \underbrace{Q}_{(n-k)\times(n-k)} \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} &\operatorname{Re}\lambda(P) < 0, \\ &\operatorname{Re}\lambda(Q) > 0; \end{aligned}$$

а функція $G(y)$ задовольняє умові

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \quad \|y_1\| < \delta,\ \|y_2\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|F(y_1) - F(y_2)\| < \varepsilon \|y_1 - y_2\|.$$

Доведення. Введемо наступні матриці розмірності $n \times n$

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{Pt} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \qquad U(t) = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & e^{Qt} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\dot{U}(t) = BU(t), \quad \dot{V}(t) = BV(t), \quad e^{Bt} = U(t) + V(t), \quad U(0) + V(0) = I$$

(тут I – одинична матриця розмірності $n \times n$.)

Крім того, враховуючи знаки власних чисел матриць P і Q, можна стверджувати, що знайдуться такі числа $\sigma > 0$, $\alpha > 0$ та $K > 0$, що

$$\|U(t)\| \le Ke^{-(\alpha+\sigma)t}, \quad t \ge 0;$$

$$\|V(t)\| \le Ke^{\sigma t}, \quad t \le 0.$$

Для довільного $a \in \mathbb{R}^n$ розглянемо інтегральне рівняння відносно невідомої функції $u(t,a)$:

$$u(t,a) = U(t)a + \int_0^t U(t-s)G(u(s,a))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(u(s,a))ds. \quad (20)$$

Нехай $u = u(t) = u(t,a)$ є розв'язком (20). Тоді

$$\frac{du}{dt} = BU(t)a + \int_0^t \overbrace{\dot{U}(t-s)}^{=BU(t-2)} G(u(s))ds + \underline{U(0)G(u(t))} -$$

$$- \int_t^\infty \overbrace{\dot{V}(t-s)}^{=BV(t-s)} G(u(t)) + \underline{V(0)G(u(t))} = |U(0) + V(0) = I|$$

$$= B\left(U(t)a + \int_0^t U(t-s)G(u(s))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(u(s))ds\right) + \underline{G(u(t))} =$$

$$= Bu(t) + G(u(t)).$$

Отже, $u(t)$ – розв'язок (19).

Будемо доводити розв'язність (20) методом послідовних наближень:

$$\begin{aligned} u^{(0)}(t,a) &\equiv 0, \\ u^{(j+1)}(t,a) &= U(t)a + \int_0^t U(t-s)G(u^{(j)}(s,a))ds - \\ &\quad - \int_t^\infty V(t-s)G(u^{(j)}(s,a)), \quad j \ge 0. \end{aligned} \quad (21)$$

За індукцією встановлюємо, що для будь-якого $j \ge 1$, для довільного $t \ge 0$ та для кожного a такого, що $\|a\| < \dfrac{\delta}{2K}$ справедлива оцінка

$$\left\|u^{(j)}(t,a) - u^{(j-1)}(t,a)\right\| \le \frac{K \cdot \|a\| e^{-\alpha t}}{2^{j-1}},$$

яка гарантує рівномірну збіжність на $t \in [0, +\infty) \times \left\{ \|a\| \le r < \dfrac{\delta}{2K} \right\}$:

$$\lim_{j\to\infty} u^{(j)}(t,a) = u(t,a),$$

де $u(t,a)$ – розв'язок (20), а отже, і розв'язок (19).

Унаслідок Теореми про диференційовну залежність від початкових даних і параметра маємо $u \in C^{(1)}\Big((0,+\infty) \times \big\{\|a\| < r\big\}\Big)$ і, крім того,

$$\|u(t,a)\| \le 2K\|a\|e^{-\alpha t}. \tag{22}$$

Нехай $u(t,a) = \begin{pmatrix} u_1(t,a) \\ \dots \\ u_n(t,a) \end{pmatrix}$.

Проаналізуємо формулу (20): для довільного $a \in \mathbb{R}^n$ у перших двох доданках у правій частині формули (20) останні $n-k$ координат дорівнюють нулю, а в третьому доданку – перші k координат дорівнюють нулю. При $t = 0$ перші k координат $u(0,a)$ співпадають з першими k координатами a :

$$u_j(0,a) = a_j, \quad j = \overline{1,k}.$$

Тепер покладемо

$$a_{k+1} = \ldots = a_n = 0.$$

Тоді для $j = \overline{k+1,n}$ з формули (20) маємо:

$$u_j(0,a) = -\left(\int_t^\infty V(-s)G(u(s,a_1,\ldots,a_k,\underbrace{0,\ldots,0}_{n-k})) \right)_j = \psi_j(a_1,\ldots,a_k).$$

Отже,

$$u(0,a) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_k \\ \psi_{k+1}(a_1,\ldots,a_k) \\ \dots \\ \psi_n(a_1,\ldots,a_k) \end{pmatrix}.$$

Далі покладемо

$$S = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid y_j = \psi_j(y_1,\ldots,y_k),\ j = \overline{k+1,n};\quad \sqrt{\sum_{i=1}^k y_i^2} < \frac{\delta}{2K} \right\} \tag{23}$$

і доведемо, що S шуканий стійкий многовид.

За побудовою S – k-мірний гладкий многовид.

За Теоремою про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для системи (19): якщо $y(0) \in S$, тобто $y(0) = u(0, a)$, то $y(t, y(0)) \equiv u(t, a)$.

З оцінки (22) випливає, що $y(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Крім того, якщо $y(0) \notin S$, то $y(t, y(0)) \nrightarrow 0$ при $t \to +\infty$.

Отже, для довільних $y(0) \in S$ та $t \geq 0$ маємо $y(t, y(0)) \in S$, тобто ми показали інваріантність S.

Залишилось переконатися у дотику до стійкого підпростору.

За Теоремою про диференційовну залежність від початкових даних:

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial y_i}(0) = 0, \qquad \forall\, j = \overline{k+1, n}, \quad \forall\, i = \overline{1, n}.$$

Тоді дотичний підпростір до S у точці 0 визначається як

$$\Big\{ y \in \mathbb{R}^n \mid y_{k+1} = y_{k+2} = \ldots = y_n = 0 \Big\} \equiv E^s.$$

Звідси S – шуканий стійкий многовид. □

Зауваження 7. *Для побудови нестійкого многовиду U потрібно зробити заміну незалежної змінної $s = -t$ і розглянути систему*

$$\dot{y} = -By - G(y).$$

Подивимось як можна застосовувати схему доведення Теореми про стійкий многовид для конструктивної побудови стійкого многовиду на прикладі конкретної системи.

Схема побудови стійкого многовиду складатиметься з наступних кроків:

1) записуємо систему у вигляді (19);

2) знаходимо матриці $U(t)$ та $V(t)$;

3) для $a \in \mathbb{R}^n$ записуємо інтегральне рівняння (20);

4) застосовуємо метод послідовних наближень (21) до рівняння (20) для $a = (a_1, \ldots, a_k, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k})$ і знаходимо $\psi_j(a_1, \ldots, a_k)$, $j = \overline{k+1, n}$, які і визначають стійкий многовид.

Приклад 24. *Розглянемо двовимірну систему*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2^2, \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_1^2. \end{cases}$$

Нас цікавитеме поведінка системи в околі положення рівноваги $(0, 0)$.

Матриця лінеаризованої системи

$$A = Df(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

вже має потрібну блочно-діагональні структуру, при цьому матриці P та Q – це матриці розмірності $1 \times 1 : P = -1, Q = 1$.

Оскільки матриця A має два власні числа різних знаків: $\lambda_1 = -1$ та $\lambda_2 = 1$, то для відповідної лінійної системи точка 0 є сідлом.

Фазовий портрет лінійної системи зображено на Рис. 22

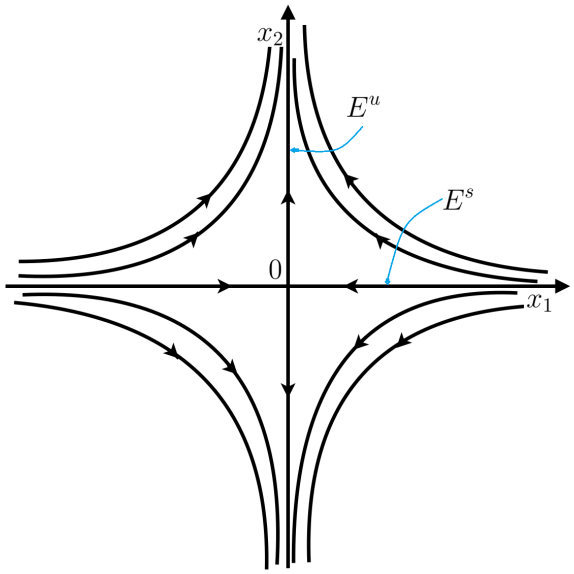


Рис. 22

Отже, стійкий підпростір E^s – це вісь $0x_1$, а нестійкий підпростр E^u – це вісь $0x_2$:

$$E^s = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 = 0 \right\}, \qquad E^u = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 = 0 \right\}.$$

Знайдемо друге наближення стійкого многовиду:

$$S = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : \ x_2 = \psi_2(x_1) \right\}.$$

Для нашої системи:

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$G(x) = f(x) - Ax = \begin{pmatrix} -x_1 - x_2^2 \\ x_2 + x_1^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2^2 \\ x_1^2 \end{pmatrix}.$$

Тепер записуємо інтегральне рівняння (20) для вектор-функції $u(t,a) = \begin{pmatrix} u_1(t,a) \\ u_2(t,a) \end{pmatrix}$, де $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$u(t,a) = U(t)a + \int_0^t U(t-s)G(u(s,a))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(u(s,a))ds =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-(t-s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_2^2(s,a) \\ u_1^2(s,a) \end{pmatrix} ds -$$

$$- \int_t^\infty \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_2^2(s,a) \\ u_1^2(s,a) \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -e^{-(t-s)} \cdot u_2^2(s,a) \\ 0 \end{pmatrix} ds - \int_t^\infty \begin{pmatrix} 0 \\ u_1^2(s,a) \cdot e^{(t-s)} \end{pmatrix} ds.$$

Далі застосовуємо до цього рівняння метод послідовних наближень: покладаючи нульове наближення тотожнім нулем

$$u^{(0)}(t,a) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

маємо

$$u^{(1)}(t,a) = \begin{pmatrix} a_1 e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u^{(2)}(t,a) = \begin{pmatrix} a_1 e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -e^{-(t-s)} \cdot 0 \\ 0 \end{pmatrix} ds - \int_t^\infty \begin{pmatrix} 0 \\ \left(a_1 e^{-s}\right)^2 \cdot e^{(t-s)} \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} - \int_t^\infty \begin{pmatrix} 0 \\ a_1^2 e^{-2s} \cdot e^{(t-s)} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} a_1 e^{-t} \\ -\frac{1}{3} a_1^2 e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Вважаємо (наближено), що $u^{(2)}(t,a) \approx u(t,a)$. Тоді

$$u(0,a) = \begin{pmatrix} a_1 \\ -\frac{1}{3} a_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \psi_2(a_1) \end{pmatrix}.$$

Отже, наближено (з точністю до другого наближення)

$$S = \left\{ x_2 = -\frac{1}{3} x_1^2 \right\}.$$

Аналогічно,

$$U = \left\{ x_1 = -\frac{1}{3}\, x_2^2 \right\}.$$

На Рис. 23 схематично зображений локальний фазовий портрет в околі точки $(0,0)$: стійкий многовид S, що зображений синьою лінією, дотикається у початку координат до стійкого підпростору відповідної лінеаризованої системи E^s (зображений синім пунктиром), аналогічно нестійкий многовид U (червона лінія) дотикається до нестійкого підпростору E^u (червоний пунктир).

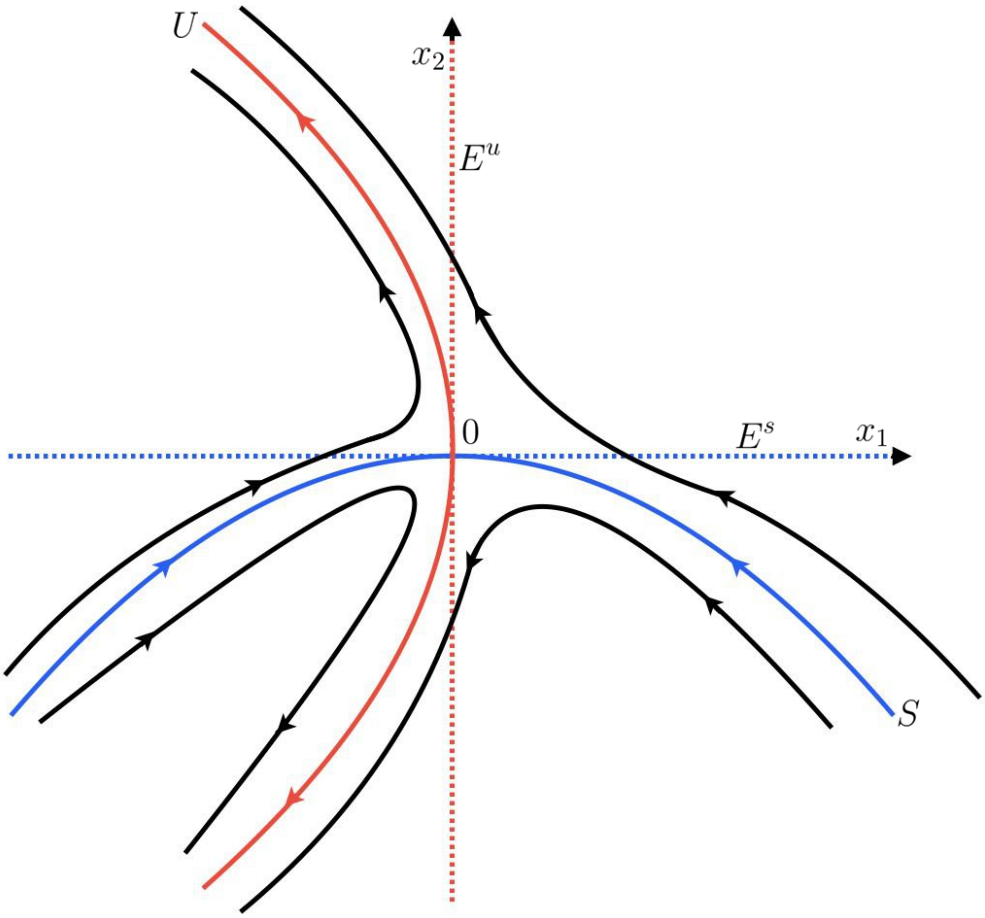


Рис. 23

Зауваження 8. *S і U визначаються в околі положенні рівноваги* 0.

Означення 16. *Множини*

$$W^s(0) = \bigcup_{t \le 0} \varphi_t(S)$$

та

$$W^u(0) = \bigcup_{t \ge 0} \varphi_t(U)$$

називаються ***глобальними стійким та нестійким многовидом*** *відповідно.*

Тоді

$$\forall\ x \in W^s(0): \quad \varphi_t(x) \to 0, \quad t \to +\infty;$$
$$\forall\ x \in W^u(0): \quad \varphi_t(x) \to 0, \quad t \to -\infty.$$

Наслідок 11. *Нехай S і U стійкий і нестійкий многовид з Теореми 17. Припустимо також, що*

$$\operatorname{Re}\lambda_j < -\alpha < 0, \quad j = \overline{1,k};$$
$$\operatorname{Re}\lambda_j > \beta < 0, \quad j = \overline{k+1,n}.$$

Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке
$delta > 0$, що виконуються оцінки

$$x_0 \in O_\delta(0) \cap S \quad \Rightarrow \quad \forall\ t \geq 0: \quad \|\varphi_t(x_0)\| \leq \varepsilon e^{-\alpha t};$$
$$x_0 \in O_\delta(0) \cap U \quad \Rightarrow \quad \forall\ t \leq 0: \quad \|\varphi_t(x_0)\| \leq \varepsilon e^{\beta t}.$$

Завдання 7. *Побудувати перші три послідовні наближення до стійкого та нестійкого многовиду системи*

$$\dot{x} = f(x).$$

Знайти границю послідовних наближень та точні формули для S і U. Розв'язати систему і переконатися, що знайдені S та U дійсно є стійким і нестіким многовидом. Зробити рисунок, зобразивши на ньому S, U, E^s та E^u.

1) $f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 + x_1^2 \end{pmatrix}$;

2) $f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ 2x_2 + 2x_1^3 \end{pmatrix}$;

3) $f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ 3x_2 - x_1^2 \end{pmatrix}$;

4) $f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 + x_1^3 \end{pmatrix}$;

5) $f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ 2x_2 - x_1^3 \end{pmatrix}$;

6) $f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 + 3x_1^2 \end{pmatrix}$;

7) $f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 - 3x_1^2 \end{pmatrix}$;

8) $f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 - 2x_1^3 \end{pmatrix}$;

9) $f(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ x_2 + x_1^2 \end{pmatrix}$;

10) $f(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ x_2 - x_1^2 \end{pmatrix}$;

11) $f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ 2x_2 + x_1^2 \end{pmatrix}$;

12) $f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ 2x_2 - x_1^3 \end{pmatrix}$.

Тема 10. Теорема Хартмана – Гробмана

Розглянемо систему

$$\dot{x} = f(x), \tag{24}$$

де $f \in C^{(1)}$, $f(0) = 0$, точка 0 – гіперболічна, тобто відповідна матриця $A = Df(0)$ лінеаризованої системи

$$\dot{x} = Ax, \tag{25}$$

не має власних чисел з нульовими дійсними частинами.

Означення 17. *Системи (24) і (25) називаються* ***топологічно еквівалентними*** *в околі точки* 0, *якщо існує гомеоморфізм* $H : U \mapsto V$, *де* U *і* V *– околи* 0, *який переводить траєкторії системи (24) у траєкторії системи (25) і зберігає напрям руху вздовж цих траєкторій.*

Приклад 25. *Розглянемо дві системи на площині* $\mathbb{R}^2$:

$$\dot{x} = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\dot{y} = By, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

У матриць A та B власні числа однакові: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -4$, просте власними векторами матриці A є

$$\lambda_1 = 2: \quad \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 = -4: \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

у той час як власними векторами матриці B є базисні вектори $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Фазові портрети обох систем зображені на Рис. 24. Легко помітити, що поворотом на 45 проти годинникової стрілки фазового портрету системи з матрицею A (рисунок ліворуч) можна отримати фазовий портрет системи з матрицею B. Повороти як раз і можуть слугувати гомеоморфізмами, що зберігають орієнтацією. Явний вигляд такого гомеоморфізму:

$$H(x) = Rx, \quad R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{причому} \quad A = R^{-1}BR.$$

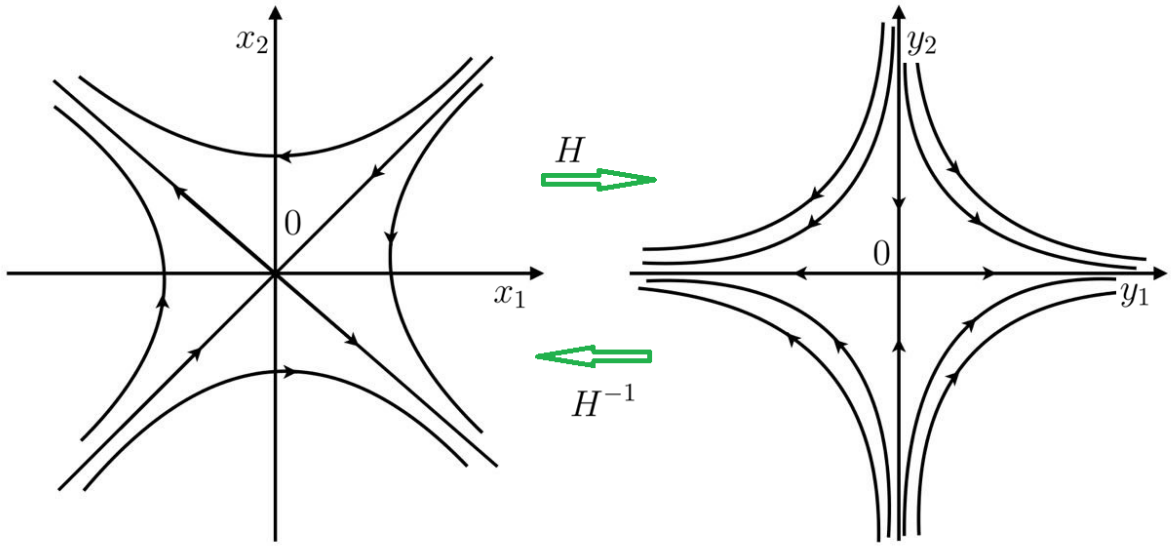


Рис. 24

Отже, ці системи топологічно еквівалентні.

Якщо розв'язок системи з матрицею A має вигляд $x(t) = e^{At}x_0$, то

$$y(t) = H(x(t)) = H\left(e^{At}x_0\right) = Rx(t) = Re^{At}x_0 =$$

$$= Re^{R^{-1}BRt}x_0 = e^{Bt}Rx_0 = e^{Bt}H(x_0),$$

тобто

$$H\left(e^{At}x_0\right) = e^{Bt}H(x_0).$$

Теорема 18 (Гробмана – Хартмана)**.** *Нехай φ_t – динамічна система, породжена нелінійною системою (24) та для довільного власного числа λ матриці $A = Df(0)$ лінеаризованої системи (25):* $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$. *Тоді існує гомеоморфізм $H : U \mapsto V$, де U, V – околи 0, такий що для кожного $x_0 \in U$ справедлива рівність:*

$$H(\varphi_t(x_0)) = e^{At}H(x_0). \tag{26}$$

Приклад 26. *Розглянемо систем, яку ми вже ддосліджували раніше,*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2. \end{cases}$$

Для цієї системи

$$A = Df(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вправа: для відображення $H(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + \dfrac{x_1^2}{3} \end{pmatrix}$ переконатися у справедливості рівності (26).

Література

[1] Капустян О.В. Теорія динамічних систем : навч. посіб. / О. В. Капустян, В.В. Пічкур, В. В. Собчук. – Луцьк : Вежа-друк, 2020. – 348 с. – [Теорія динамічних систем]

[2] Капустян О.В. Стійкість та атрактори еволюційних рівнянь: навч. посіб. / О.В. Капустян, В. В. Пічкур, В. В. Собчук. – 2023. – 380 с. – [Стійкість та атрактори еволюційних рівнянь]

[3] Парасюк І. О. Вступ до якісної теорії диференціальних рівнянь / І. О. Парасюк. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2005. – 88 с. – [Вступ до якісної теорії диференціальних рівнянь]

[4] Парасюк І. О. Динамічні системи: навч. посіб. 2022. – 209 с. Електронне видання. – [Динамічні системи]

[5] Перестюк М. О. Асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь / М. О. Перестюк, О. В. Капустян, П. В. Фекета, Н. В. Касімова . – К. : ВПЦ "Київський університет", 2015. – 138 с. – [Асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь]

[6] Самойленко А. М. Диференціальні рівняння / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк. – К. : Либідь, 2003. – 600 с. – [Диференціальні рівняння]

[7] Самойленко А. М. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, М. О. Перестюк. – К. : Либідь, 2003. – 450 с. – [Диференціальні рівняння у прикладах і задачах]

[8] Perko L. Differential Equations and Dynamical Systems / Lawrence Perko. – New York: Springer-Verlag, 2001. – 555+xvi p. – [Differential Equations and Dynamical Systems]