КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
кафедра інтегральних та диференціальних рівнянь

Конспект лекцій з курсу "Якісні й асимптотичні методи теорії диференціальних рівнянь"

Капустян О.В., Капустян О.А., Касімова Н.В.

КИЇВ — 2025

ЯКІСНІ Й АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Конспект лекцій / Розробники Капустян О.В., Капустян О.А., Касімова Н.В., 2025.

Рекомендовано до друку вченою радою
механіко-математичного факультету
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол №7 від 07.02.2025 р.)

Зміст

Вступ 4

Тема 1. Локальне існування розв'язків системи диференціальних рівнянь 5

Тема 2. Леми Гронуолла та глобальне існування розв'язку системи диференціальних рівнянь 10

Тема 3. Стійкість: основні поняття і лінеаризація 21

Тема 4. Метод функції Ляпунова 32

Тема 5. ω-граничні точки та ω-граничні множини 39

Тема 6. Принцип інваріантності Ла Саля 43

Тема 7. Методи побудови функції Ляпунова 46

Тема 8. Стійкість лінійних систем 52

Література 67

Вступ

Курс "Якісні й асимптотичні методи теорії диференціальних рівнянь" є складовою освітньої програми підготовки фахівців за освітнім рівнем "бакалавр" галузі знань 11 Математика та статистика зі спеціальності 111 Математика освітньої програми "Математика". Конспект лекцій з курсу "Якісні й асимптотичні методи теорії диференціальних рівнянь" присвячений вивченню підходів до аналізу поведінки розв'язків диференціальних рівнянь, за допомогою яких моделюються процеси і явища у різних галузях науки та техніки. Ця дисципліна є важливою частиною сучасної математики. Розуміння якісних і асимптотичних методів має критичне значення для науковців, які працюють із моделями реального світу. Точний розв'язок диференціального рівняння далеко не завжди можливий, однак якісний аналіз дає змогу отримати інформацію про поведінку системи, стійкість розв'язків, точки рівноваги та їхню природу.

Лекційний матеріал згрупований за темами, кожній з яких присвячена певна кількість занять. Логічний перехід між темами є природним і послідовним: від забезпечення існування розв'язків на малих інтервалах часу до аналізу довготривалої поведінки системи. Такий підхід дає повне розуміння як локальних властивостей системи, так і її глобальної динаміки. Тема локального та глобального існування розв'язків систем диференціальних рівнянь є фундаментальною для розуміння теорії диференціальних рівнянь і становить основу для всіх подальших розділів курсу. Леми Гронуолла є ключовим інструментом для аналізу розв'язків. Їх використання допомагає встановити, чи можна продовжити розв'язок до глобального. Після встановлення існування розв'язку наступним кроком є дослідження його стійкості, тобто поведінки розв'язків за малих збурень початкових умов. У конспекті послідовно висвітлено метод дослідження стійкості для систем різного типу. Принцип інваріантності дозволяє перейти від оцінки стійкості до аналізу асимптотичної поведінки системи, включаючи періодичні рухи або граничні цикли. Принцип Ла Саля розширює підхід Ляпунова, дозволяючи визначати асимптотичну поведінку системи навіть у складних випадках. Інваріантні множини описують глобальну структуру фазового простору, допомагаючи ідентифікувати ключові особливості динаміки системи.

Конспект лекцій з курсу "Якісні й асимптотичні методи теорії диференціальних рівнянь" є корисним додатковим джерелом для студентів при засвоєнні матеріалу курсу, а також для всіх читачів, бажаючих познайомитися з основами якісного аналізу теорії диференціальних рівнянь.

Тема 1. Локальне існування розв'язків системи диференціальних рівнянь

Рекомендована література [2, 6, 7]

Основним об'єктом вивчення є наступна задача Коші:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

Основна задача: з'ясувати, як веде себе розв'язок при $t \to \infty$.

Розглянемо кілька відомих фактів із теорії диференціальних рівнянь.

1) Якщо $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, то формула

$$\int_0^x \frac{ds}{f(s)} = t$$

визначає розв'язок (1) в неявній формі.

2) Якщо $f(x) = Ax$, де A – стала матриця, то розв'язок (1) визначається співвідношенням $x(t) = e^{At} \cdot x_0$, де e^{At} – матрична експонента.

Всі інші випадки явного інтегрування не допускають.

Розглянемо основні позначення:

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ – норма в $\mathbb{R}^n$, $A = ((a_{ij}))_{i,j=1}^n \Rightarrow \|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$, де $\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1,j=1}^n a_{ij}^2}$, $\|x\|_\infty = \sup_t \|x(t)\|$.

Однією із важливих задач є доведення результату про існування розв'язку (локального чи глобального).

Означення 1. *Функція $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ називається локально ліпшицевою, якщо $\forall r > 0$ $\exists L = L(r)$ така, що $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ таких, що $\|x\| \le r$, $\|y\| \le r$ виконується*

$$\|f(x) - f(y)\| \le L \cdot \|x - y\|.$$

Якщо L не залежить від r, то f називається глобально ліпшицевою.

Приклад 1. *Якщо функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною, то f – локально ліпшицева.*

Дійсно, за теоремою про середнє значення маємо:

$$f(x) - f(y) = f'(\theta)(x - y),$$

де $\theta \in [x, y]$. Тому

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\theta)| \cdot |x - y| \le \max_{\theta \in [x,y]} |f'(\theta)| \cdot |x - y|.$$

Поклавши

$$L = \max_{\theta\in[x,y]} |f'(\theta)|,$$

будемо мати локальну ліпшицевість.

Приклад 2. *Нехай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, f із класу $\mathbb{C}^1$ (у цьому випадку теж справедлива теорема про середнє). Тоді f – локально ліпшицева.*

Дійсно, справедлива нерівність

$$\|f(x) - f(y)\| \le \sup_{\theta\in[x,y]} \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(\theta)\right\| \cdot \|x - y\|,$$

де $\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ *– матриця Якобі,* $L = \sup_{\theta\in[x,y]} \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(\theta)\right\|$.

Теорема 1 (Локальне існування розв'язків)**.** *Нехай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – локально ліпшицева. Тоді $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ $\exists T = T(x_0) > 0$ таке, що (1) має єдиний розв'язок, визначений на $[0, T]$.*

Доведення. Розв'язок (1) є розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds \tag{2}$$

і навпаки: неперервний розв'язок інтегрального рівняння (2) є розв'язком (1). Доведемо існування і єдиність неперервного розв'язку (2).

Розглянемо наступний простір:

$$Y = \{x \in \mathbb{C}([0, T], \mathbb{R}^n) : \|x\|_\infty = \sup_{t\in[0,T]} \|x(t)\| \le K\}$$

(величини T, K визначені нижче).

Далі розглянемо функцію

$$\psi(x) := x_0 + \int_0^t f(x(s))ds.$$

Виберемо $K > \|x_0\| + 1$, $L = L(K)$, $T = \frac{1}{\|f(x_0)\|+2LK}$.

Перевіримо, що $\psi : Y \to Y$. Якщо $x \in Y$, то $\|x\|_\infty \le K$, тому

$$\|\psi(x)(t)\| = \left\|x_0 + \int_0^t f(x, s)ds\right\| \le \|x_0\| + \left\|\int_0^t f(x, s)ds\right\| \le$$

$$\leq \|x_0\| + \int\limits_0^t \|f(x(s)) - f(x_0)\|ds + \int\limits_0^t \|f(x_0)\|ds \leq$$

$$\leq \|x_0\| + 2LKT + \|f(x_0)\| \cdot T \leq \|x_0\| + 1 < K.$$

Отже, $\|\psi(x)\|_\infty \leq K$. Покажемо, що ψ – відображення стиску. Розглянемо $\|x\|_\infty \leq K$, $\|y\|_\infty \leq K$. Отже, справедлива наступна нерівність:

$$\|\psi(x)(t) - \psi(y)(t)\| \leq \int\limits_0^t \|f(x(s)) - f(y(s))\|ds \leq L \cdot \max_{t\in[0,T]} \|x(t) - y(t)\| \cdot T.$$

Звідси маємо, що

$$\rho(\psi(x), \psi(y)) \leq L \cdot T \cdot \rho(x, y) = \frac{L}{\|f(x_0)\| + 2LK} \cdot \rho(x, y).$$

При достатньо великих K маємо, що $\alpha := \frac{L}{\|f(x_0)\|+2LK} < 1$, а тому ψ – відображення стиску. За теоремою Банаха існує єдине $\bar{x} \in Y : \bar{x} = \psi(\bar{x})$. Отже, $\bar{x}$ – розв'язок (2), а відтак і (1).

Теорема доведена. □

Приклад 3. *Довести локальне існування розв'язку для системи*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \cdot x_2 \end{cases}$$

Для застосування теореми про локальне існування потрібно встановити, що для: $|x_1| \leq r$, $|x_2| \leq r$ *маємо* $\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\| \leq L(r)$. *Матриця Якобі має вигляд:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

Оцінимо норму матриці:

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\| = \sqrt{4x_1^2 + 1 + x_2^2 + x_1^2} \leq \sqrt{6r^2 + 1} = L(r)$$

Отже, f *– локально ліпшицева. Тому для* $\forall x_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *існує єдиний розв'язок* $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, *визначений при* $t \in [0, T]$, $T = T(x_0)$.

Зауваження 1. *Клас локально ліпшицевих функцій ширший, ніж клас неперервно диференційовних функцій.*

Приклад 4 (Функція насичення(Saturation Function)). *Розглянемо функцію насичення (Рис. 1):*

$$sat(x) = \begin{cases} -1, x < -1 \\ x, x \in [-1, 1] \\ 1, x > 1 \end{cases}$$

Відомо, що $sat(x) \notin \mathbb{C}^1$, *але вона є глобально ліпшицевою.*

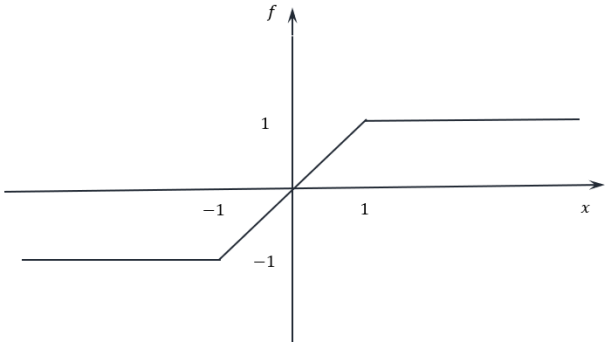


Рис. 1

Дійсно,

$$|sat(x) - sat(y)| = 1 - x \leq y - x = |x - y|,$$

отже, $L = 1$ *і функція насичення є глобально ліпшицевою.*

Зауваження 2. *Якщо* f *не є неперервною, то* f *не є локально ліпшицевою. Дійсно, наприклад, функція*

$$f(x) = sign(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ -1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

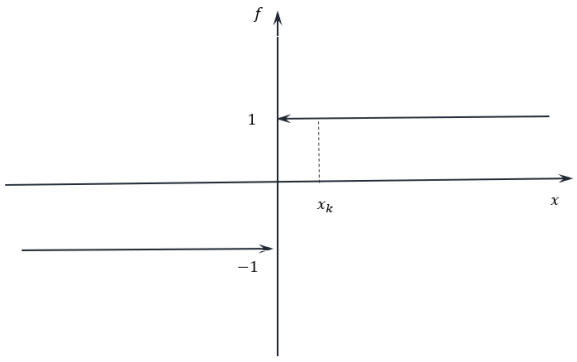


Рис. 2

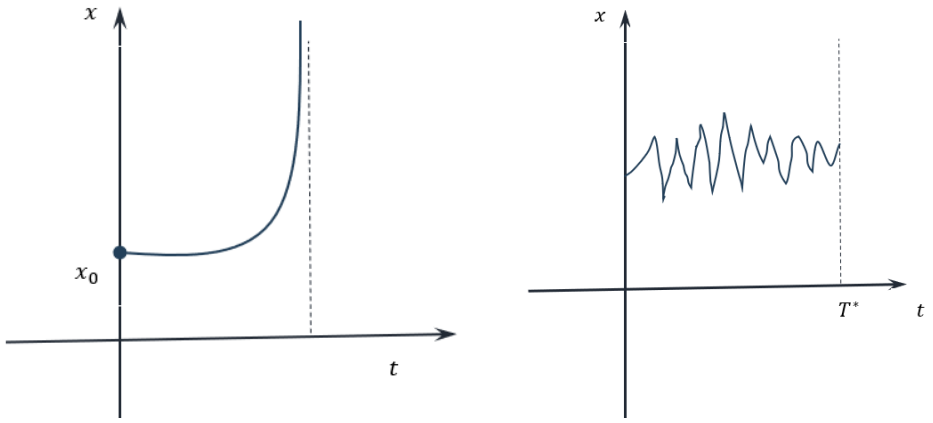
не є локально ліпшицевою (принаймні в околі 0). Якщо візьмемо $x_k = \frac{1}{k^2}$, $y = 0$. *Тоді*

$$|f(x_k) - f(y)| = 1 > k|k - y|,$$

оскільки $k \to \infty$, то f не є локально ліпшицевою.

Означення 2. *Інтервал $[0, T^*)$ називається максимальним інтервалом існування розв'язку (1), якщо не існує розв'язку $y(t)$ задачі (1), визначеного на $[0, T^+)$, $T^+ > T^*$, що $x(t) = y(t)$, $t \in [0, T^*)$. Якщо $T^* = \infty$, то x – глобальний розв'язок.*

Розглянемо приклади випадків, коли $T^* < \infty$. Перший випадок це так званий ефект "blow up" (Рис. 3а). На Рис. 3б показано розв'язок, що залишається обмеженим, але не продовжується за T^*. У випадку, коли f – локально ліпшицева, ситуація на Рис. 3б неможливий.



(а) "Blow up" (б) Обмежений розв'язок

Рис. 3

Лема 1. *Нехай f – локально ліпшицева функція. Тоді розв'язок $x(t)$ задачі (1) має скінчений максимальний інтервал $[0, T^*) \Leftrightarrow \|x(t)\| \to \infty$, $t \to T^*$.*

Доведення. Відмітимо, що достатність є очевидною.

Доведемо необхідність. Нехай $[0, T^*)$ – максимальний інтервал існування, $T^* < \infty$, і, від супротивного нехай $\sup\limits_{t \in [0, T^*)} \|x(t)\| \leq K$. Тоді оскільки f – локально ліпшицева, а отже неперервна, то маємо, що $f(x(t))$ – обмежена на $[0, T^*)$. Відомо, що розв'язок $x(t)$ задовольняє інтегральне рівняння

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds$$

для всіх $t \in [0, T^*)$.

Далі, оскільки функція f є неперервною і обмеженою, то права частина даної інтегральної нерівності є неперервною на $[0, T^*)$. Отже, і ліва частина є неперервною функцією. Оскільки існує границя інтегралу в правій частині при $t \to T^*$, то існує границя $x(t)$ при $t \to T^*$. Враховуючи припущення,

що розв'язок є обмеженим, будемо мати:

$$\lim_{t \to T^*} \|x(t)\| \leq K,$$

тому x – неперервна на $[0, T^*]$. Далі розглянемо початкові дані $(T^*, x(T^*))$ і застосуємо теорему 1 про локальне існування розв'язку. Будемо мати, що $x(t)$ існує на $[0, T^* + \delta)$, де $\delta > 0$ – маленьке. Звідси отримаємо протиріччя з тим, що $[0, T^*)$ максимальний інтервал.

Лема доведена. □

Зауваження 3. *Твердження леми 1 справедливе і для неперервної функції f.*

Зауваження 4. *Якщо f не є неперервною, то лема 1 не вірна.*

Приклад 5. *Розглянемо функцію*

$$\dot{x} = 1 - 2sign(x) = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x > 0, \\ 1, & \text{якщо } x = 0, \\ 3, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Нехай $x_0 < 0$. Тоді $\dot{x} = 3 \Rightarrow x(t) = x_0 + 3t \Rightarrow T^* = -x_0/3 \Rightarrow [0, T^*]$ – максимальний інтервал існування розв'язку, але при цьому розв'язок залишається обмеженим (Рис. 4).

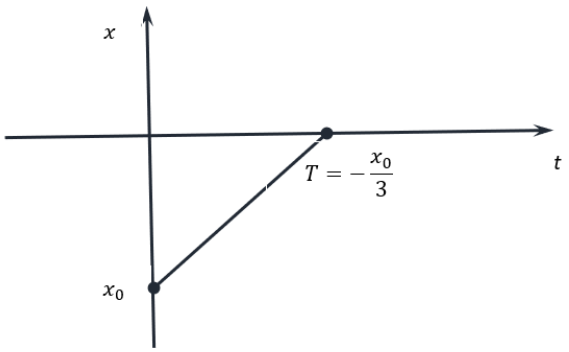


Рис. 4

Ця ситуація неприйнятна з точки зору диференціальних рівнянь, адже ми стверджуємо, що якщо розв'язок обмежений, то він продовжується далі.

Тема 2. Леми Гронуолла та глобальне існування розв'язку системи диференціальних рівнянь

Рекомендована література [2, 3]

Зауваження 5. *Згідно леми 1, якщо ми хочемо довести, що розв'язок $x(t)$ задачі 1 існує на $[0,T]$ (на фіксованому інтервалі) або на $[0,+\infty)$, нам потрібно встановити оцінку наступного вигляду:*

$$\|x(t)\| \leq \varphi(t), \tag{3}$$

де φ існує і обмежена на $[0,T]$ або на $[0,+\infty)$. Далі робимо висновок, що розв'язок існує там, де й φ. Оцінки вигляду 3 встановлюються за допомогою диференціальних нерівностей і називаються апріорними оцінками. Як приклад застосування оцінки (3) доведемо теорему Пеано.

Теорема 2. *[Пеано]. Якщо $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – неперервна, то існує розв'язок (1) на $[0,T]$, де $T = T(x_0)$.*

Доведення. Використаємо метод апроксимацій. Розглянемо послідовність апроксимаційних задач:

$$\begin{cases} \frac{dx_k}{dt} = f_k(x_k) \\ x_k(0) = x_0 \end{cases} \tag{4}$$

Відомо, що існує єдиний розв'язок $x_k(t)$, $t \in [0,T_k]$, $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – локально ліпшицеві, $f_k \to f$ рівномірно на компактах при $k \to \infty$ (довільну неперервну функцію можна в рівномірній метриці наблизити гладкими функціями, згідно теореми Вейєрштраса, або навіть поліномами).

Нехай $\|x - x_0\| \leq R$. Тоді $\max\limits_{\|x-x_0\|\leq R} \|f(x)\| \leq M(R)$. Маємо, що

$$\max_{\|x-x_0\|\leq R} \|f_k(x) - f(x)\| \to 0,\ k \to \infty.$$

Тому для достатньо великих k

$$\max_{\|x-x_0\|\leq R} \|f_k(x)\| \leq 2M(R).$$

Покладемо $T = \frac{R}{2M(R)}$. Розглянемо рівність

$$x_k(t) = x_0 + \int\limits_0^t f_k(x_k(s))ds.$$

Звідки

$$\|x_k(t)\| \leq \|x_0\| + \int\limits_0^t 2M(R)ds \leq \|x_0\| + T \cdot 2M(R) \Rightarrow \|x_k(t)\| \leq \|x_0\| + R.$$

Покладемо $\varphi(t) := \|x_0\| + R$. Будемо мати, що $x_k(t)$ існує на $[0,T]$ (оцінка не залежить від k). Далі

$$\|x_k(t) - x_k(s)\| \leq 2M(R)|t - s|.$$

Отже, за теоремою Асколі-Арцела $x_k \rightrightarrows x$, $k \to \infty$, де x – розв'язок (1) (Здійснили граничний перехід).

Теорема доведена. □

Приклад 6. *Розглянемо систему*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = \sin(x_1^2) + x_2 \end{cases} \tag{5}$$

Спочатку переконаємось в локальному існуванні розв'язку, тобто покажемо, що якщо $|x_1| \le r$, $|x_2| \le r$, *то*

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \right\| \le L(r).$$

Зауважимо, що це зручний прийом для перевірки ліпшицевості функції від кількох змінних. У нашому випадку

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2x_1 \cos(x_1^2) & 1 \end{pmatrix}$$

Звідки маємо, що

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4x_1^2 \cos^2(x_1^2) + 1^2} = \sqrt{6 + 4x_1^2 \cos^2(x_1^2)} \le \sqrt{6 + 4r^2} =: L(r).$$

Встановимо глобальне існування розв'язку. Там, де розв'язок існує, помножимо перше рівнянн на x_1, *друге – на* x_2 *і додамо:*

$$\dot{x}_1 x_1 + \dot{x}_2 x_2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2 \sin(x_1^2) + x_2^2$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}x_1^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 + x_2 \sin x_1^2$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) \le x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + |x_2| \cdot 1$$

$$\frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) \le 4(x_1^2 + x_2^2) + x_2^2 + 1 \le 5(x_1^2 + x_2^2) + 1$$

В силу нерівності Гронуола, що розглянемо нижче, для довільних t, *де виконується ця нерівність, будемо мати:*

$$\|x(t)\|^2 = x_1^2(t) + x_2^2(t) \le \left(x_1^2(0) + x_2^2(0) + \frac{1}{5} \right) e^{5t} - \frac{1}{5} =: \varphi(t).$$

Оскільки $\varphi(t)$ *існує* $\forall t \ge 0$, *то довільний розв'язок системи* (5) *існує на* $[0, +\infty)$.

Теорема 3 (Лема Гронуола в диференціальній формі). *Нехай* $x \in \mathbb{C}^1([0,T])$ *задовольняє наступну нерівність:*

$$\frac{d}{dt}x(t) \leq g(t) \cdot x(t) + h(t).$$

Покладемо $G(t) = \int\limits_0^t g(s)ds$. *Тоді* $\forall t \in [0,T]$ *справедлива нерівність:*

$$x(t) \leq x(0) \cdot e^{G(t)} + \int\limits_0^t e^{G(t)-G(s)} \cdot h(s)ds \tag{6}$$

Наслідок 1. *Якщо* $\frac{d}{dt}x(t) \leq a \cdot x(t) + b$, *то* $G(t) = at$. *Тоді нерівність* (6) *має наступний вигляд:*

$$x(t) \leq x(0)e^{at} + \int\limits_0^t e^{a(t-s)} \cdot b ds = x(0)e^{at} + e^{at} \cdot b \int\limits_0^t e^{-as} ds = \left(x(0) + \frac{b}{a}\right) e^{at} - \frac{b}{a}.$$

Зауваження 6. *В прикладі 6 використана оцінка із наслідку 1 для* $a = 5$, $b = 1$.

Доведення. (теореми 3) Розглянемо нерівність

$$\frac{d}{dt}x(t) - g(t)x(t) \leq h(t) \tag{7}$$

Помножимо нерівність (7) на $e^{-G(t)}$ і отримаємо:

$$\left(\frac{d}{dt}x(t) - \frac{d}{dt}G(t)x(t)\right) e^{-G(t)} \leq h(t)e^{-G(t)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)e^{-G(t)}\right) \leq h(t)e^{-G(t)}$$

або

$$\frac{d}{ds}\left(x(s)e^{-G(s)}\right) \leq h(s)e^{-G(s)}$$

Проінтегрувавши від 0 до t, будемо мати:

$$x(t)e^{-G(t)} - x(0)e^{-G(0)} \leq \int\limits_0^t e^{-G(s)} \cdot h(s)ds$$

або

$$x(t) \leq x(0) \cdot e^{G(t)} + \int\limits_0^t e^{G(t)}e^{-G(s)} \cdot h(s)ds,$$

звідки маємо нерівність (6).

Теорема доведена. □

Теорема 4 (Лема Гронуола в інтегральній формі). *Нехай* $x \in \mathbb{C}([0,T])$ *задовольняє нерівність*

$$x(t) \le \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)x(s)ds, \tag{8}$$

де α *– монотонно неспадна,* $\beta \ge 0$ *– неперервна. Тоді* $\forall t \in [0,T]$ *має місце нерівність*

$$x(t) \le \alpha(t) \cdot e^{\int_0^t \beta(s)ds}. \tag{9}$$

Наслідок 2. *Якщо* $x(t) \le C + \int_0^t \beta(s)x(s)ds$, *то*

$$x(t) \le C \cdot e^{\int_0^t \beta(s)ds}.$$

Доведення. (теореми 4) Покладемо

$$u(t) = \int_0^t \beta(s)x(s)ds.$$

Маємо, що $u \in \mathbb{C}^1([0,T])$. З (8) отримуємо $u(t) \ge x(t) - \alpha(t)$, $u(0) = 0$. Тоді

$$u'(t) = \beta(t)x(t) \le \beta(t)(u(t) + \alpha(t)) \Rightarrow$$
$$u'(t) \le \beta(t)u(t) + \beta(t)\alpha(t)$$

Тоді з теореми 3 маємо, що

$$u(t) \le \underbrace{u(0)}_{=0} e^{\int_0^t \beta(s)ds} + \int_0^t e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau} \cdot \beta(s)\alpha(s)ds \le$$

$$\alpha(t) \cdot \int_0^t e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau} \cdot \beta(s)ds = \alpha(t)e^{\int_0^t \beta(\tau)d\tau} \cdot \int_0^t \underbrace{e^{-\int_0^s \beta(\tau)d\tau}\beta(s)}_{-\frac{d}{ds}e^{-\int_0^s \beta(\tau)d\tau}} ds =$$

$$= \alpha(t)e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau}\left(1 - e^{-\int_0^t \beta(\tau)d\tau}\right) = \alpha(t)e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau} - \alpha(t) \Rightarrow$$

$$\underbrace{u(t) + \alpha(t)}_{\ge x(t)} \le \alpha(t)e^{\int_0^t \beta(\tau)d\tau}.$$

Звідси маємо нерівність (9).

Теорема доведена. □

Зауваження 7. *Якщо* $x \in \mathbb{C}^1([0,T],\mathbb{R}^n)$, *то*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 = (\dot{x}(t), x(t)).$$

Розглядаємо систему

$$\dot{x} = f(x), \tag{10}$$

де $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – локально ліпшицева функція.

Теорема 5 (Глобальне існування розв'язку в системі з правою частиною лінійного росту)**.** *Нехай в системі* (10) *функція* f *має наступну властивість:*

$$\|f(x)\| \le A \cdot \|x\| + B,$$

де A, B *– сталі. Тоді розв'язок системи* (10) *існує на* $[0, +\infty)$.

Доведення. Помножимо систему (10) скалярно на x:

$$(\dot{x}, x) = (f(x), x)$$

Далі отримаємо наступну нерівність:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 \le \|f(x)\| \cdot \|x\| \le A\|x\|^2 + B\|x\|$$

Скористаємось нерівністю Юнга $2ab \le \varepsilon \cdot a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}$ $\forall \varepsilon > 0$ і отримаємо:

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 \le 2A\|x\|^2 + 2B\|x\| \le (2A+\varepsilon)\|x\|^2 + \frac{B^2}{\varepsilon}.$$

Звідси за лемою Гронуола маємо:

$$\|x(t)\|^2 \le \left(\|x(0)\|^2 + \frac{B^2}{\varepsilon^2(2A+\varepsilon)}\right) e^{(2A+\varepsilon)t}$$

Права частина існує $\forall t \ge 0$. Отже, довільний розв'язок існує $\forall t \ge 0$.

Теорема доведена. □

Зауваження 8. *Якщо* $f(x) = Ax + b$, *то*

$$\|f(x)\| \le \|A\| \cdot \|x\| + \|b\|.$$

Зауваження 9. *Нехай* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *– глобально ліпшицева:*

$$\exists L > 0 : \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\|f(x) - f(y)\| \le L\|x - y\|.$$

Тоді

$$\|f(x)\| = \|f(x) - f(0) + f(0)\| \le \|f(x) - f(0)\| + \|f(0)\| \le L\|x\| + \|f(0)\|.$$

Теорема 6 (неперервна залежність розв'язку від початкових даних). *Нехай $x(t)$, $y(t)$ – розв'язки (10) на $[0,T]$, $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$. Тоді*

$$\exists L = L(x_0, y_0, T) : \forall t \in [0,T]$$

$$\|x(t) - y(t)\| \le e^{Lt}\|x_0 - y_0\|. \tag{11}$$

Доведення. Нехай

$$\sup_{t\in[0,T]} (\|x(t)\| + \|y(t)\|) \le r.$$

Тоді розглянемо $z(t) = x(t) - y(t)$. Помножимо систему $\dot{z} = f(x) - f(y)$ скалярно на z. Отримаємо наступну нерівність:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z(t)\|^2 \le \|f(x) - f(y)\| \cdot \|z\|.$$

Звідки маємо нерівність

$$\frac{d}{dt}\|z(t)\|^2 \le 2L\|z\|^2.$$

Далі за лемою Гронуола

$$\|z(t)\|^2 \le e^{2Lt} \cdot \|z(0)\|^2$$

або

$$\|z(t)\| \le e^{Lt}\|z(0)\|.$$

Звідки маємо нерівність (11).

Теорема доведена. □

Зауваження 10. *Якщо f – глобально ліпшицева, то L не залежить від x_0, y_0, T.*

Нагадаємо поняття абсолютно неперервних функцій.

Означення 3. *Функція $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ – абсолютно неперервна, якщо $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ для довільної системи неперетинних інтервалів (a_k, b_k), $\sum\limits_k (b_k - a_k) < \delta$ виконується*

$$\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| \le \varepsilon$$

Зауваження 11. *Якщо в якості системи інтервалів із означення 3 взяти один інтервал, то отримаємо означення неперервної функції. Таким чином, маємо підсилення поняття неперервної функції.*

Наслідок 3. *f – абсолютно неперервна $\Rightarrow$ f – неперервна.*

Наслідок 4. *f – ліпшицева $\Rightarrow$ f – абсолютно неперервна.*
Дійсно,

$$\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| \le \sum_k L|b_k - a_k| = L\sum_k |b_k - a_k| < \delta L < \varepsilon,\ \delta < \varepsilon/L.$$

Теорема 7. *Якщо f – абсолютно неперервна $\Leftrightarrow$ $\exists f'(x)$ для майже всіх (м.в.) $x \in [a,b]$ і при цьому $\forall x$ має місце формула Ньютона-Лейбніца:*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

Приклад 7. *Функція $f(x) = |x|$ – абсолютно неперервна. Вона має похідну не у всіх точках, але цих точок мало.*

Означення 4. *Множина A має "міру нуль", якщо $\forall \varepsilon > 0$*

$$A \subset \bigcup_k I_k,\ \sum_k |I_k| < \varepsilon$$

Приклад 8. *Прикладами таких множин можуть бути: $A = \{x_1, \cdots, x_n\}$, $A = Q \bigcap [0,1]$.*

Нагадаємо, що поняття "майже скрізь" це скрізь за виключенням множини міри нуль.

Приклад 9. $f(x) = |x| \Rightarrow \exists f'(x)\ \forall x \neq 0$

Зауваження 12. *$f \in \mathbb{C}^1([a,b];\mathbb{R}^n) \Rightarrow f$ – абсолютно неперервна.*

Лема 2. *Якщо $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ – абсолютно неперервна функція, то функція $t \mapsto \|x(t)\|$ – абсолютно неперервна функція і справедлива нерівність*

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\| \le \|\dot{x}(t)\| \text{ м.с.} \tag{12}$$

Доведення. Спочатку доведемо, що функція $t \mapsto \|x(t)\|$ – абсолютно неперервна.
Оскільки

$$\sum_k |\|x(b_k)\| - \|x(a_k)\|| \le \sum_k \|x(b_k) - x(a_k)\| < \varepsilon,$$

як тільки $\sum\limits_k (b_k - a_k) < \delta$, то за означенням 3 функція $t \mapsto \|x(t)\|$ – абсолютно неперервна, а отже має похідну майже скрізь. Встановимо нерівність (12). Нехай в точці t існують $\frac{d}{dt}\|x(t)\|$ і $\dot{x}(t)$. Тоді для фіксованого $h > 0$ виконується

$$\frac{1}{h}(\|x(t+h)\| - \|x(t)\|) \le \frac{1}{h}\|x(t+h) - x(t)\|$$

$$\frac{1}{h}(\|x(t+h)\| - \|x(t)\|) \le \left\|\frac{1}{h}(x(t+h) - x(t))\right\| \tag{13}$$

і при $h \to 0+$ з (13) будемо мати

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\| \le \|\dot{x}(t)\| \text{ м.с.}$$

Лема доведена. □

Лема 3. *Нехай $x, y \in \mathbb{C}([0,T])$, і нехай виконується*

$$x(t) \le y(t) \text{ м.с.} \tag{14}$$

Тоді $x(t) \le y(t)\ \forall t \in [0,T]$.

Доведення. Для довільного $t \in [0,T]$ $\exists t_k \to t$ така, що

$$x(t_k) \le y(t_k). \tag{15}$$

Оскільки $x(\cdot), y(\cdot)$ – неперервні, то перейшовши в (15) до границі при $t \to \infty$ будемо мати (14).

Лема доведена. □

Зауваження 13 (модифікація леми Гронуола). *Нехай $\frac{dx}{dt} \le g(t)x + h(t)$ м.с., то $\forall t$ виконується нерівність*

$$x(t) \le e^{G(t)}x(0) + \int_0^t e^{G(t)-G(s)}h(s)ds.$$

Наслідок 5. *Нехай для $\dot{x} = f(x)$ виконується*

$$\|f(x)\| \le A \cdot \|x\| + B.$$

Тоді $\forall t \ge 0$

$$\|x(t)\| \le \left(\|x(0)\| + \frac{B}{A}\right)e^{At}$$

Доведення. Розглянемо $\dot{x} = f(x)$. Тоді

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\| \le \|\dot{x}(t)\| = \|f(x)\| \le A\|x\| + B \text{ м.с.}$$

За лемою Гронуола $\forall t \ge 0$

$$\|x(t)\| \le e^{At}\|x(0)\| + \int_0^t e^{A(t-s)} \cdot B ds = \left(\|x(0)\| + \frac{B}{A}\right)e^{At}$$

Зокрема, якщо $\|f(x)\| \le B$, то $\forall t \ge 0\ \|x(t)\| \le \|x(0)\| + Bt$.
Дійсно,

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\| \le \|f(x)\| \le B \text{ м.с.} \Rightarrow$$
$$\|x(t)\| \le \|x(0)\| + Bt \text{ м.с.},$$

тому це справедливо для всіх t.

Наслідок доведений. □

Лема 4. *Нехай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – неперервна і обмежена, задача Коші*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{16}$$

має єдиний розв'язок $x(t, x_0)$. Тоді $\forall T > 0$

$$\sup_{t\in[0,T]} \|x(t, x_0) - x(t, x_0^k)\| \to 0,\ x_0^k \to x_0.$$

Доведення. Позначимо $x_k(t) := x(t, x_0^k)$, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|f(x)\| \le M$. Тоді з (16) м.с. виконується

$$\frac{d}{dt}\|x_k(t)\| \le \|\dot{x}_k(t)\| = \|f(x_k)\| \le M \Rightarrow$$
$$\forall t \in [0, T]\ \|x_k(t)\| \le \|x_0^k\| + MT$$

Отже, $\{x_k\}$ – обмежена.
Маємо, що

$$x_k(t) - x_k(s) = \int_s^t \dot{x}_k(\tau)d\tau \Rightarrow$$

$$\|x_k(t) - x_k(s)\| \le \int_s^t \|\dot{x}_k(\tau)\|d\tau \le M|t - s|$$

Тому $\{x_k\}$ – рівностепенево неперервна. Тому за теоремою Асколі-Арцела (по підпослідовності) маємо:

$$x_k \rightrightarrows x \text{ в } \mathbb{C}([0, T]) \Leftrightarrow$$
$$\sup_{t\in[0,T]} \|x_k(t) - x(t)\| \to 0, k \to \infty.$$

Перейшовши до границі при $k \to \infty$ в рівності

$$x_k(t) = x_0^k + \int_0^t f(x_k(s))ds,$$

одержуємо, що $x(t) = x(t, x_0)$ (бо це розв'язок і він єдиний). □

Лема 5. *Нехай* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *– глобально ліпшицева функція,* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *– неперервна,* $\|f - g\|_\infty = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \|f(x) - g(x)\| < \infty$. *Нехай* $x(t)$ *– розв'язок задачі*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \tag{17}$$

$y(t)$ *– розв'язок задачі*

$$\begin{cases} \dot{y} = g(y) \\ y(0) = x_0 \end{cases}. \tag{18}$$

Тоді $\forall t \geq 0$ *виконується нерівність*

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \frac{\|f - g\|_\infty}{L} \cdot e^{Lt},$$

де L *– стала Ліпшиця.*

Доведення. Якщо f – глобально ліпшицева, то розв'язок $x(t)$ задачі (17) існує на $[0, T]$ принаймні, і оскільки g – неперервна, то існує принаймні один розв'язок $y(t)$ задачі (18) на якомусь скінченному інтервалі. Візьмемо спільний інтервал існування і розглянемо $z(t) = x(t) - y(t) \Rightarrow \dot{z} = f(x) - g(y)$. Далі розглянемо

$$\frac{d}{dt}\|z(t)\| \leq \|\dot{z}(t)\| \leq \|f(x) - g(y)\| \leq \|f(x) - g(y)\| + \|f(y) - g(y)\|$$

Одержуємо: для м.в. t виконується

$$\frac{d}{dt}\|z(t)\| \leq L\|z(t)\| + \|f - g\|_\infty$$

За лемою Гронуола: $\forall t \geq 0$

$$\|z(t)\| \leq \left(\|z(0)\| + \frac{\|f - g\|_\infty}{L}\right) e^{Lt}$$

Лема доведена. □

Вправи

1. Розглянемо систему рівнянь $\dot{x} = Ax$. Довести: $\|x(t)\| \leq M\|x(0)\|e^{-\delta t}$. Вказати значення δ.

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

б) $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

в) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Вказівка: знайти власні числа A і скористаємось нерівністю: якщо $\|e^{At}\| \leq Me^{-\delta t}$, $Re(\lambda) < -\delta$

2. Довести глобальну розв'язність (довільний розв'язок існує на $[0, +\infty)$) для наступних систем:

а) $\dot{x} = x + 2\sin(x)$

б) $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = e^{-x^2} + y \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x} = -x + \frac{2y}{1+y^2} \\ \dot{y} = -y + \frac{2x}{1+x^2} \end{cases}$

Тема 3. Стійкість: основні поняття і лінеаризація

Рекомендована література [1, 2, 5, 6, 7]

Розглядається система

$$\dot{x} = f(x). \tag{19}$$

Вважаємо, що $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – локально ліпшицева (для локального існування розв'язку для довільних початкових даних із $\mathbb{R}^n$) і нехай $\exists \bar{x} \in \mathbb{R}^n$: $f(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \bar{x}$ – положення рівноваги системи (19). Будемо досліджувати стійкість цього положення рівноваги.

Означення 5. *$\bar{x}$ називається стійким, якщо $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ таке, що*

$$\|x(0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon \ \forall t \geq 0$$

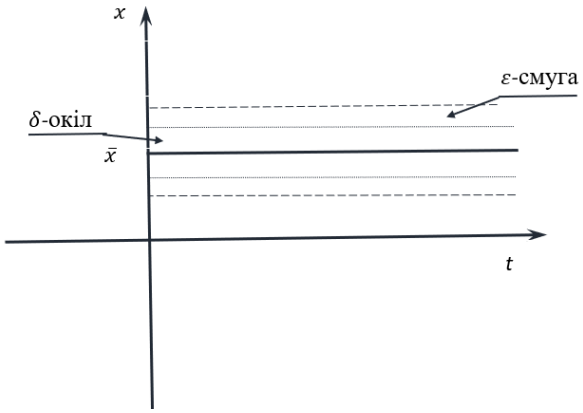


Рис. 5

Приклад 10. *Розглянемо рівняння $\dot{x} = 0$, $\bar{x} = 0$ – положення рівноваги. Розв'язки цього рівняння $x = C$. Вони зовсім трохи відхилені від 0, але не наближаються асимптотично (Рис. 6).*

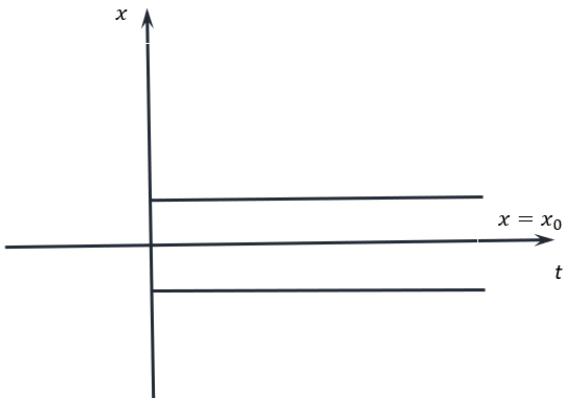


Рис. 6

Означення 6. *$\bar{x}$ називається асимптотично стійким, якщо $\bar{x}$ – стійкий і $\exists\delta > 0$ таке, що*

$$\|x(0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0.$$

Приклад 11. *Розглянемо рівняння: $\dot{x} = -x$, $\bar{x} = 0$ – положення рівноваги. Розв'язками є функції $x(t) = x_0 e^{-t}$ (Рис. 7) і*

$$|x(t) - \bar{x}| \leq |x_0| e^{-t} \to 0,\ t \to \infty.$$

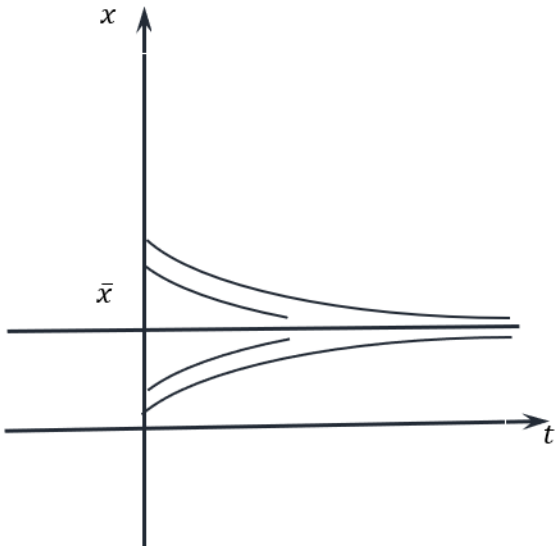


Рис. 7

Означення 7. *$\bar{x}$ називається нестійким, якщо порушується означення 5, тобто через деякий час розв'язки виходять за межі ε-смужки.*

Приклад 12. *Розглянемо рівняння $\dot{x} = x$, $\bar{x} = 0$ – положення рівноваги. Всі інші розв'язки визначаються як $x(t) = x_0 e^t$ і незалежно від початкових даних $x_0 \neq 0$ і $|x(t) - \bar{x}| \to \infty$, $t \to \infty$ (Рис. 8).*

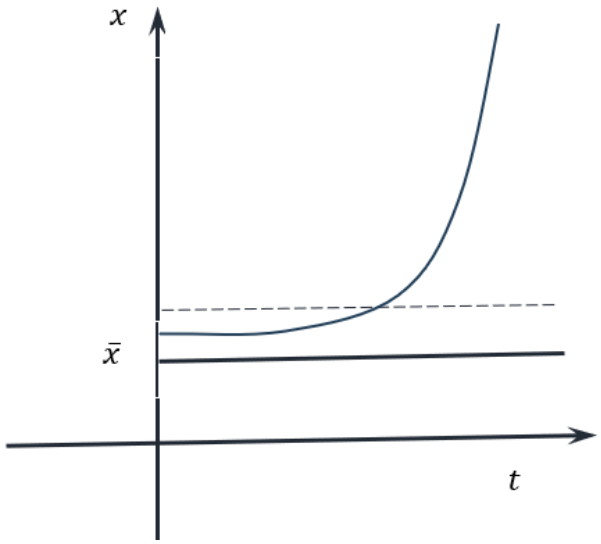


Рис. 8

Зауваження 14. *Поняття стійкості пов'язане з дослідженням поведінки розв'язку на нескінченності. І для того, щоб вона виконувалась недостатньо, щоб виконувалась гладкість правої частини.*

Розглядаємо рівняння $\dot{x} = f(x)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Нагадаємо таку властивість: якщо $\bar{x}$ – положення рівноваги ($f(\bar{x}) = 0$), то довільний розв'язок $x(t)$ монотонно прямує до $\bar{x}$ при $t \to +\infty$ або $t \to -\infty$. Можуть бути, наприклад, такі ситуації (Рис. 9, Рис. 10):

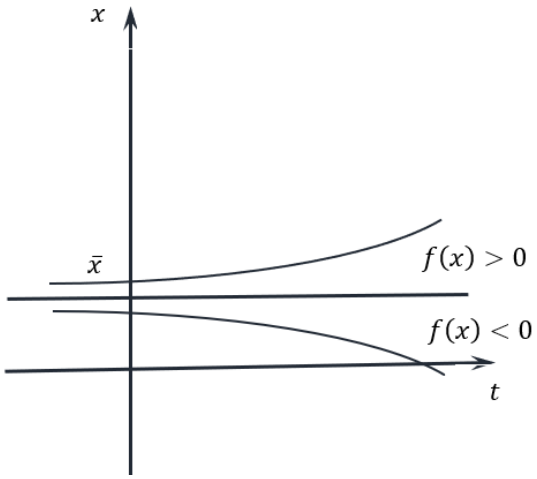


Рис. 9

Такий підхід дозволяє зобразити схематично поведінку інтегральних кривих, навіть не маючи їх явного аналітичного вигляду.

Приклад 13. *Розглянемо рівняння* $\dot{x} = x(1 - x)$.

Явне знаходження розв'язків займає час. Визначимо положення рівноваги: $\bar{x} = 0$, $\bar{x} = 1$. *Зобразимо поведінку інтегральних кривих (Рис. 11).*

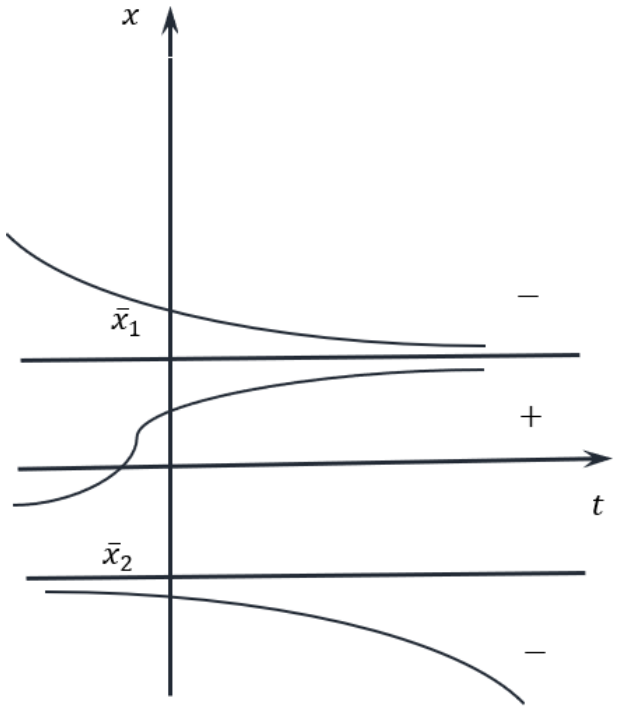


Рис. 10

При цьому у розв'язків, що стартують з x_0 немає вертикальних асимптот, вони залишаються обмеженими, а у інших можуть бути, тобто вони необов'язково існують на всій осі.

Лема 6. *Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – локально ліпшицева, $f(\bar{x}) = 0$, $\exists f'(\bar{x})$. Тоді*

- *якщо $f'(\bar{x}) < 0$, то $\bar{x}$ – асимптотично стійке положення рівноваги;*
- *якщо $f'(\bar{x}) > 0$, то $\bar{x}$ – нестійке положення рівноваги.*

Доведення. В деякому околі точки $\bar{x}$ маємо

$$|f(x)| = |f(x) - f(\bar{x})| \le L|x - \bar{x}|.$$

Тоді з формули $t = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{ds}{f(s)}$ маємо:

$$t \ge \left| \int\limits_{x_0}^{x} \frac{ds}{L|s - \bar{s}|} \right| = \frac{1}{L} \left| \ln \left| \frac{x - \bar{x}}{x_0 - \bar{x}} \right| \right| \to \infty,\ x \to \bar{x},$$

тому розв'язки існують на $(0, +\infty)$ в деякому околі $\bar{x}$.

Нехай $f'(\bar{x}) = \alpha < 0$. Тоді

$$f(x) = \alpha(x - \bar{x}) + o(x - \bar{x}),\ x \to \bar{x}.$$

Звідси в деякому околі точки $\bar{x}$

$$\begin{cases} f(x) > 0,\ x < \bar{x} \\ f(x) < 0,\ x > \bar{x} \end{cases}$$

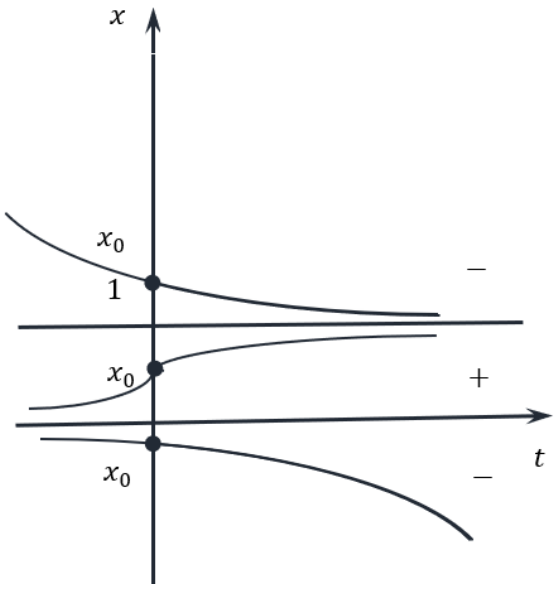


Рис. 11

Тому $x(t) \to \bar{x}$, $t \to +\infty$, звідки маємо, що $\bar{x}$ – асимптотично стійке положення рівноваги (Рис. 12).

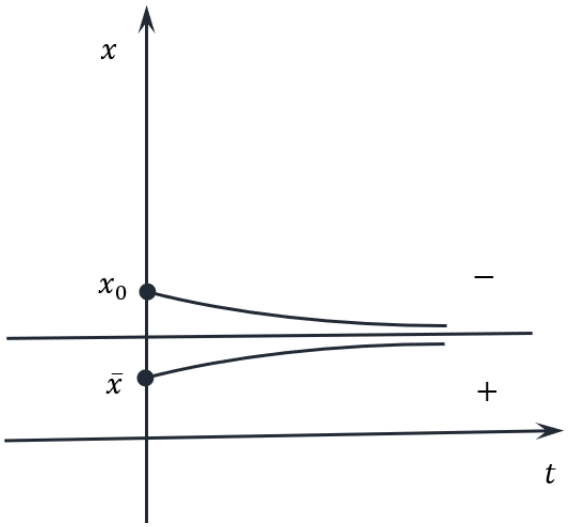


Рис. 12

Для другого випадку доведення аналогічне. □

Зауваження 15. *Якщо* $f'(\bar{x}) = 0$, *то за знаком* f' *нічого сказати не можна.*

Приклад 14. *Розглянемо рівняння* $\dot{x} = x^2(1-x) = f(x)$, $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = 0$ *– два положення рівноваги. Маємо* $f'(x) = 2x - 3x^2$
$f'(x_1) = -1 < 0 \Rightarrow \bar{x}_1$ *– асимптотично стійке положення рівноваги;*
$f'(\bar{x}_2) = 0 \Rightarrow \bar{x}_2$ *– про стійкість нічого не можемо сказати.*

Розглянемо цю ситуацію детальніше, проаналізувавши малюнок (Рис.

13).

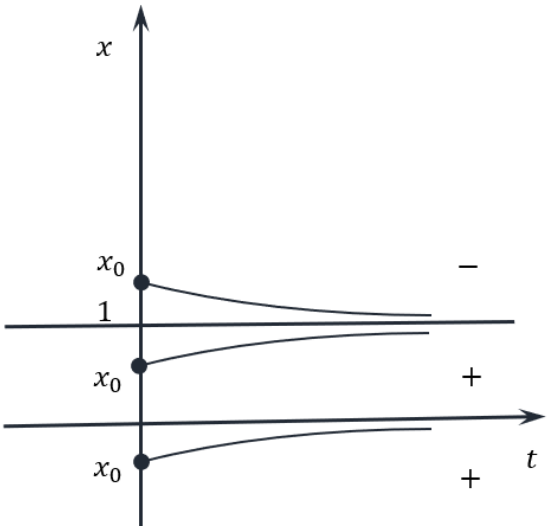


Рис. 13

За малюнком видно, що $\bar{x}_2$ *– нестійке положення рівноваги, бо хоч розв'язки, що стартують з* $x_0 < 0$ *і "тягнуться" до* $\bar{x}_2 = 0$*, але розв'язки для* $\bar{x}_0 > 0$ *"потягнуться" вгору до* $\bar{x}_1 = 1$*, тому навіть якщо ми візьмемо достатньо малий окіл, з якого беремо початкові дані, то розв'язки "розлетяться".*

Приклад 15. *Розглянемо рівняння* $\dot{x} = x^3(x-1)$*. Положення рівноваги:* $\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = 0$*. Маємо* $f'(x) = 4x^3 - 3x^2$ *і*
$f'(\bar{x}_1) = 1 > 0 \Rightarrow \bar{x}_1$ *– нестійке положення рівноваги;*
$f'(\bar{x}_2) = 0 \Rightarrow$ *характер стійкості* $\bar{x}_2$ *не вдається визначити.*

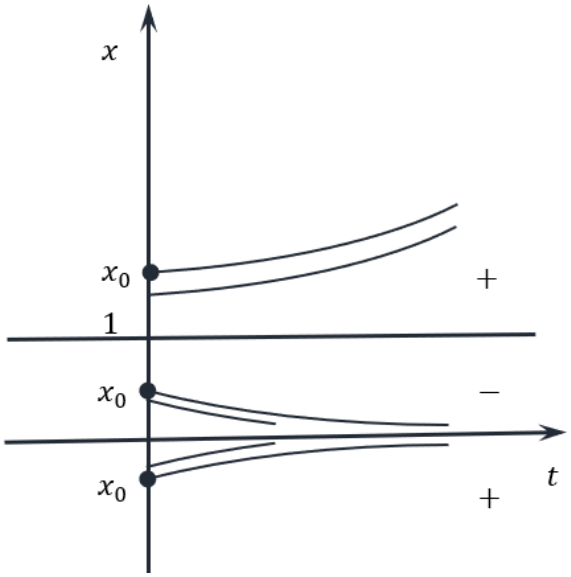


Рис. 14

Проте за малюнком (Рис. 14) видно, що $\bar{x}_2$ *– асимптотично стійке*

положення рівноваги.

Крім того, за малюнком ще раз переконуємось, що стійкість це досить локальна характеристика і залежить від початкових даних. Якщо у нашому випадку $x_0 < 0$*, то всі інтегральні криві асимптотично "притягуються" до* $\bar{x}_2 = 0$*, а от у випадку* $x_0 > 0$ *характер стійкості відрізняється для* $0 < x_0 < 1$ *і для* $x_0 > 1$*.*

Далі розглянемо систему

$$\dot{x} = Ax \tag{20}$$

A – $n \times n$ – стала матриця

Рівняння для визначення положення рівноваги $Ax = 0$. Крім $\bar{x} = 0$ ця система може мати ще розв'язки.

Якщо $det(A) = 0 \Rightarrow$ (20) має підпростір положень рівноваги.

Якщо $det(A) \neq 0 \Rightarrow$ (20) має єдине положення рівноваги $\bar{x} = 0$.

Зауваження 16. *Стійкість довільного положення рівноваги системи* (20) *еквівалентна стійкості* $\bar{x} = 0$*.*

Лема 7. *Нехай* $\{\lambda_i\}$ *– власні числа матриці* A*. Тоді:*

- $\bar{x} = 0$ *– асимптотично стійке положення рівноваги* $\Leftrightarrow \forall \lambda_i \; Re(\lambda_i) < 0$*;*
- $\bar{x} = 0$ *– стійке положення рівноваги* $\Leftrightarrow \forall \lambda_i \; Re(\lambda_i) \leq 0$*, і якщо* $Re(\lambda) = 0$*, то кратність* $\lambda = n - rank(A - \lambda E)$*, де* E *– одинична матриця розмірності* $n \times n$*;*
- $\bar{x} = 0$ *– нестійке* $\Leftrightarrow$ *коли або* $\exists \lambda : Re(\lambda) > 0$ *або* $Re(\lambda_i) \leq 0$*, але кратність* $\lambda > n - rank(A - \lambda E)$*.*

Доведення. Будь-який розв'язок (20) подається у вигляді: $x(t) = x_0 e^{At}$, $e^{At} = H diag\left[e^{\lambda_1 t} T_{m_1}(t), \ldots, e^{\lambda_s} T_{m_s}(t)\right] H^{-1}$, де

$$T_m(s) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

m – розмір Жорданової клітини, що відповідає λ.

Якщо $\forall \lambda \; Re(\lambda) < 0$, то $\|e^{At}\| \to 0$, $t \to \infty$. Звідки маємо асимптотичну стійкість.

Якщо $Re(\lambda) = 0$ і кратність $\lambda = n - rank(A - \lambda E) \Rightarrow m_i = 1$ і $\|T_{m_i}(t)\|$ – обмежена, а отже $\|e^{At}\|$ – обмежена. Тому $\bar{x} = 0$ – стійке.

Лема доведена. □

Наслідок 6. *Якщо* $\forall \lambda_i \ Re(\lambda_i) < -\gamma < 0$, *то* $\exists M \geq 1$ *(можна вибрати саме таке), що виконується наступна нерівність:*

$$\forall t \geq 0 \ \|e^{At}\| \leq M \cdot e^{-\gamma t}$$

Приклад 16 (Лінійне хвильове рівняння з дисипацією)**.** *Розглянемо наступне рівняння*

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + \omega^2 x = 0, \ \beta \geq 0, \ \omega > 0.$$

Дисипація визначається наявністю другого доданку у лівій частині рівняння. Якщо цього доданку немає, то маємо консервативну систему.

Введемо нову змінну $\dot{x} = y$. *В змінних* (x, y) *маємо систему:*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x - \beta y \end{cases}$$

Матриця системи має вигляд $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\beta \end{pmatrix}$. *Розглянемо* $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. *Запишемо характеристичне рівняння для* A: $-\lambda(-\beta - \lambda) + \omega^2 = 0$ *або* $\lambda^2 + \beta\lambda + \omega^2 = 0$. *Його корені* $\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\omega^2}}{2}$.

Якщо $\beta \geq 2\omega \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ *– дійсні, від'ємні* $\Rightarrow \bar{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *– асимптотично стійке.*

Якщо $\beta < 2\omega \Rightarrow Re(\lambda_{1,2}) = -\frac{\beta}{2} < 0 \Rightarrow \bar{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *– асимптотично стійке.*

Тобто в системі з дисипацією у нас завжди є асимптотична стійкість.

Більше того, $\forall t \geq 0$ *виконується* $\|z(t)\| \leq M \cdot \|z(0)\| e^{-\delta t}$, *де*

$$\delta < \begin{cases} \frac{1}{2}(\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\omega^2}), \ \beta \geq 2\omega \\ \frac{\beta}{2}, \ \beta < 2\omega \end{cases}$$

Терер розглянемо більш загальний вигляд системи:

$$\dot{x} = f(x), \ x(t) \in \mathbb{R}^n \tag{21}$$

Вважаємо, що $f(\bar{0}) = 0$. Дослідимо стійкість $\bar{x} = \bar{0}$. Нехай $f \in \mathbb{C}^1(O_\delta(\bar{0}))$, $O_\delta(\bar{0}) = \{x \in \mathbb{R}^n | \ \|x\| < \delta\}$.

Представимо функцію f у наступному вигляді:

$$f(x) = \int_0^1 \frac{d}{ds} f(sx) ds = \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(sx) \right) \cdot x =$$

$$= \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(sx) \pm \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{0}) \right) \cdot x =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{0})}_{A} x + \underbrace{\int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}(sx) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{0}) \right) ds}_{G(x)} \cdot x,$$

$A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{0})$ – матриця 1-го наближення, $\mu(r) = \max\limits_{\|x\| \le r} \|G(s)\| \to 0$, $r \to 0$ і $\mu(r)$ – коректно означена.

Отже, система (21) переписується у вигляді:

$$\dot{x} = Ax + G(x) \cdot x \tag{22}$$

Теорема 8. *[Про лінеаризацію] Мають місце наступні твердження:*
1) $\bar{x} = \bar{0}$ – асимптотично стійке, якщо $\forall \lambda$ – власного числа A маємо $Re(\lambda) < 0$;
2) $\bar{x} = \bar{0}$ – нестійке, якщо $\exists \lambda$ – власне число A: $Re(\lambda) > 0$.

Доведення. (пункту 1) Використаємо наступний факт: якщо $\forall \lambda \; Re(\lambda) < 0$, то $\exists \gamma > 0 \; \exists M \ge 1$:

$$\|e^{At}\| \le M e^{-\gamma t} \; \forall t \ge 0.$$

Виберемо $r > 0$ таке, що $\mu(r) < \frac{\gamma}{M}$.

Нехай $x_0 : \|x_0\| < \frac{r}{M} \le r \Rightarrow$ з теореми 1 розв'язок, що стартує з x_0 існує принаймні локально, і весь розв'язок за нормою $< r$. Позначимо $T = \sup\{t > 0 | \; \|x(t)\| < r\} \le \infty$. Для $\forall t \in [0, T)$

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} G(x(s)) x(s) ds. \tag{23}$$

Цю формулу можна отримати, виходячи із методу варіації довільної сталої, розуміючи (22) як лінійну неоднорідну систему.

Виведемо із (23) апріорну оцінку:

$$\|x(t)\| \le M e^{-\gamma t} \|x_0\| + \int_0^t M e^{-\gamma(t-s)} \underbrace{\|G(x(s))\|}_{\le \mu(r)} \cdot \|x(s)\| ds$$

або

$$\|x(t)\| \le M e^{-\gamma t} \|x_0\| + \int_0^t M e^{-\gamma(t-s)} \cdot \mu(r) \cdot \|x(s)\| ds$$

Домножимо останню нерівність на $e^{\gamma t}$:

$$\|x(t)\|e^{\gamma t} \le M \cdot \|x_0\| + \int\limits_0^t M\mu(r)e^{\gamma s}\|x(s)\|ds$$

Тоді за лемою Гронуола: $\forall t \in [0, T)$

$$\|x(t)\|e^{\gamma t} \le M\|x_0\|e^{\int\limits_0^t M\mu(r)ds}.$$

Отже, $\forall t \in [0, T)$ маємо нерівність

$$\|x(t)\| \le M\|x_0\|e^{(M\mu(r)-\gamma)t} \tag{24}$$

Зважаючи на вибір $\mu(r)$ та вибір x_0 отримаємо такий ланцюжок міркувань: $\forall t \in [0, T]$ $\|x(t)\| < r \Rightarrow T = \infty \Rightarrow \forall t \ge 0$ $\|x(t)\| < r \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$ – стійкий. Крім того, з (24) маємо, що $\|x(t)\| \to 0$, $t \to \infty$. Отже, $\bar{x} = \bar{0}$ – асимптотично стійке.

Теорема доведена. □

Наслідок 7. *Якщо $\bar{x}$ – положення рівноваги (21) і для всіх власних чисел матриці $A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})$ виконується $Re(\lambda) < 0$, то $\exists M, \delta, \gamma$:*

$$\|x_0 - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| \le Me^{-\gamma t} \ \forall t \ge 0$$

Якщо $\forall \lambda$ $Re(\lambda) \le 0$ і є числа з $Re(\lambda) = 0$, то лінеаризація не працює.

Приклад 17. *Розглянемо систему* $\begin{cases} \dot{x} = y^2 + z^2 \\ \dot{x} = z \\ \dot{z} = -y \end{cases}$ *і* $\bar{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. *Дослідимо на стійкість $\bar{u} = \bar{0}$. Скористаємось методом першого наближення:*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(\bar{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 2y & 2z \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} |_{x=0,y=0,z=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm i$ – *власні числа цієї матриці.*

З теореми про стійкість за першим наближенням висновок зробити не можемо. Дослідимо беспосередньо.

З двох останніх рівнянь системи маємо $ydy + zdz = 0$, а тому $y^2 + z^2 = C$ – перший інтеграл, а отже $\forall t \ge 0$ $y^2(t) + z^2(t) = y^2(0) + z^2(0)$. Звідси $x(t) = x_0 + (y^2(0) + z^2(0))t$ і якщо $y^2(0) + z^2(0) \ne 0$, то $\|x(t)\| \to \infty$, $t \to \infty$, тому $\bar{u}$ – нестійкий.

Приклад 18. *Розглянемо систему* $\begin{cases} \dot{x} = -x(y^2+z^2) \\ \dot{x} = z \\ \dot{z} = -y \end{cases}$ *і* $\bar{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Дослідимо на стійкість $\bar{u} = \bar{0}$. *Скористаємось методом першого наближення:*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(\bar{0}) = \begin{pmatrix} -(y^2+z^2) & -2xy & -2xz \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} |_{x=0,y=0,z=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm i$ – *власні числа цієї матриці. Як і попередньому прикладі* $y^2 + z^2 = C \Rightarrow y^2(t) + z^2(t) = y^2(0) + z^2(0)$.
З першого рівняння системи маємо $\frac{d}{dt} = -(y^2(0) + z^2(0))x \Rightarrow$

$$x(t) = x(0)e^{-(y^2(0)+z^2(0))t} \Rightarrow |x(t)| \leq |x(0)| \Rightarrow$$

$$\forall t \ \|u(t)\| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)} \leq \|u(0)\|.$$

Отже, $\bar{u} = \bar{0}$ – *стійке (але не асимптотично стійке!)*

Приклад 19. *(рівняння маятника) Розглянемо рівняння* $\ddot{x} + b\dot{x} + a\sin(x) = 0$, $a > 0$, $b \geq 0$ ($b = 0$ – *відсутність тертя). Дослідимо на стійкість тривіальний розв'язок.*

Перейдемо до еквівалентної системи: введемо нову змінну $y = \dot{x}$ *і отримаємо*
$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -a\sin(x) - by \end{cases}$, $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\bar{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{z}_2 = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$, *всі інші ведуть себе таким же чином попарно. Скористаємось методом першого наближення:*

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a\cos(x) & -b \end{pmatrix}, \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{z}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & -b \end{pmatrix},$$

звідки $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2+4a}}{2}$. *Якщо* $b \geq 0$, *то одне з чисел* λ *буде додатнім, тому* $\bar{z}_2$ – *нестійке.*

Тепер проведемо аналогічні дослідження для $\bar{z}_1$:
$\frac{\partial f}{\partial z}(\bar{z}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{pmatrix}$, *звідки* $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4a}}{2}$.
Якщо $b > 0$ *і* $b^2 - 4a \geq 0$, *то* $\lambda_{1,2} < 0$ *і маємо асимптотичну стійкість.*
Якщо $b > 0$ *і* $b^2 - 4a < 0$, *то* $Re(\lambda) = \frac{-b}{a} < 0$ *і маємо асимптотичну стійкість.*
Якщо $b = 0$, *то* $Re(\lambda) = 0$, *і за теоремою 8 нічого не можемо сказати.*

Тема 4. Метод функції Ляпунова

Рекомендована література [1, 2, 6, 7]

Розглядаємо систему

$$\dot{x} = f(x) \tag{25}$$

Вважаємо, що $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – локально ліпшицева, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ розв'язок з початковими даними x_0 існує на $[0, +\infty)$.
Позначимо: $x(t, x_0)$ – розв'язок (25) з $x(0, x_0) = x_0$.

Лема 8. *Функція $(t, x_0) \mapsto x(t, x_0)$ має властивості:*
• $x(0, x_0) = x_0$, $x(t+s, x_0) = x(t, x(s, x_0))$ $\forall t, s \geq 0$ – *напівгрупова властивість;*
• $(t, x_0) \mapsto x(t, x_0)$ – *неперервна за сукупністю змінних.*

Доведення. Зафіксуємо $s > 0$ і розглянемо функцію $x_s(t) = x(t + s)$ – розв'язок (25). Дійсно,

$$\frac{d}{dt}x_s(t) = \frac{d}{dt}x(t+s) = f(x(t+s)) = f(x_s(t)).$$

Це означає, що x_s – розв'язок (25), $x_s(0) = x(s) = x(s, x_0)$. Тоді в силу єдиності розв'язку задачі Коші:

$$\forall t \geq 0 \quad \underbrace{x_s(t)}_{x(t+s,x_0)} = x(t+s) = x(t, x(s, x_0)).$$

Неперервність випливає з теореми 6. Дійсно,

$$\|x(t, x_0) - x(t, y_0)\| \leq e^{LT}\|x_0 - y_0\|, \; t \in [0, T] \tag{26}$$

Нехай $t_n \to t_0$, $x_0^n \to x_0$, в силу (26) маємо

$$\|x(t_n, x_0^n) - x(t_0, x_0)\| \leq \|x(t_n, x_0^n) - x(t_n, x_0)\| + \|x(t_n, x_0) - x(t_0, x_0)\| \leq$$
$$\leq e^{LT}\|x_0^n - x_0\| + \|x(t_n, x_0) - x(t_0, x_0)\| \to 0, \; n \to \infty.$$

□

Означення 8. *Представимо розв'язок у вигляді: $x(t, x_0) = S(t)x_0$. Тут $\{S(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$ – напівгрупа, породжена (25).*

Далі вважаємо, що $f(\bar{0}) = \bar{0}$ і досліджуємо на стійкість $\bar{x} = \bar{0}$.

Означення 9. *Для функції $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ похідна в силу системи (25) визначається наступним чином:*

$$\dot{V}(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) \cdot f_i$$

Приклад 20. *Для системи* $\begin{cases} \dot{x} = x + y = f_1 \\ \dot{y} = x^3 - y^2 = f_2 \end{cases}$ *розглянемо функцію* $V(x, y) = x^2 + 2y^2$. *Тоді*

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f_1 + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot f_2 = 2x(x + y) + 4y(x^3 - y^2) = 2x^2 + 2xy + 4x^3y - 4y^3$$

Зауваження 17. *Якщо* $x(t)$ *– розв'язок* (25), *то*

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x(t)) \cdot \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x(t)) \cdot f_i(x(t)) = \dot{V}(x(t))$$

Означення 10. *Нехай* $V \in \mathbb{C}^1(O_R(\bar{0}))$, $V(\bar{0}) = 0$, $V(x) > 0$ $\forall x \in O_R(\bar{0}) \setminus \bar{0}$ $\dot{V}(x) \leq 0$ $\forall x \in O_R(\bar{0})$. *Тоді* V *називається функцією Ляпунова* (25).

Приклад 21. *Якщо* $V(x)$ *– інтеграл системи* (25), *тобто* $\frac{d}{dt}V(x(t)) \equiv 0$ $\Rightarrow \dot{V}(x) \leq 0 \Rightarrow V$ *– функція Ляпунова.*

Тепер розглянемо задачу Коші

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{27}$$

Досліджуємо на стійкість $\bar{x} = 0$.

Теорема 9. *[Ляпунова про стійкість] Якщо в* (27) *існує функція Ляпунова, то* $\bar{x} = 0$ *– стійкий.*

Доведення. Для $\varepsilon \in (0, R)$ покладемо

$$C(\varepsilon) := \min_{\|x\|=\varepsilon} V(x) > 0 \text{ (в силу властивостей} V).$$

Виберемо $\delta < \varepsilon$ так, що $\forall x \in O_\delta(0)$ $V(x) < C(\varepsilon)$ (це завжди можливо, оскільки $V(0) = 0$).

Розглянемо розв'язок (27) $x(t, x_0)$, $\|x_0\| < \delta$.

Якщо $\forall t \geq 0$ $\|x(t, x_0)\| < \varepsilon$, то все доведено, бо це і є стійкість. Інакше $\exists T > 0$ таке, що $\forall t \in [0, T)$ $\|x(t, x_0)\| < \varepsilon$, а $\|x(T, x_0)\| = \varepsilon$. З іншого боку, $\forall t \in [0, T]$

$$\dot{V}(x(t, x_0)) = \frac{d}{dt}V(x(t, x_0)) \leq 0 \text{ (за умовою)} \Rightarrow$$

$$V(x(T, x_0)) \leq V(x(0, x_0)) = V(x_0) < C(\varepsilon).$$

З іншого боку, $\|x(T, x_0)\| = \varepsilon \Rightarrow$ (тобто ця точка бере участь у цьому колі $\|x\| = \varepsilon$, то функція в ній приймає значення $\geq C(\varepsilon)$), $\Rightarrow V(x(T, x_0)) \geq C(\varepsilon)$ $\Rightarrow \emptyset$.

Теорема доведена. □

Теорема 10. *[Ляпунова про асимптотичну стійкість] Нехай для (27) існує функція Ляпунова V, причому $\dot{V}(x) < 0\ \forall x \in O_R(0) \setminus \{0\}$. Тоді $\bar{x} = 0$ – асимптотично стійкий.*

Доведення. Для доведення використаємо наступну лему

Лема 9. *Нехай для функції $g(t)$ маємо: $\exists \bar{g}\ \forall t_n \to \infty\ \exists t_{n_k}$ така, що $g(t_{n_k}) \to \bar{g}$. Тоді $g(t) \to \bar{g}$, $t \to \infty$.*

Згідно леми 9 маємо:

$$\forall \varepsilon \in (0, R)\, \exists \delta < \varepsilon\ \forall x_0 :\ \|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x_0)\| < \varepsilon\, \forall t \geq 0,$$

отже, $\{x(t, x_0) | t \geq 0\}$ – обмежена.

Доведемо, що $V(x(t, x_0)) \to 0$, $t \to \infty$.

Дійсно, $\frac{d}{dt} V(x(t, x_0)) \leq 0$ (навіть строго) $\Rightarrow t \mapsto V(x(t, x_0))$ – монотонна $\Rightarrow \exists \lim\limits_{t \to \infty} V(x(t, x_0)) = C \geq 0$ (в силу властивостей V).

Припустимо, що $C > 0$. Тоді по підпослідовності $x(t_n, x_0) \to \hat{x}$, $t_n \to \infty$ (в обмеженої послідовності існує збіжна підпослідовність), тому $V(x(t_n, x_0)) \to V(\hat{x})$ (V – неперервна)$\Rightarrow C > 0 \Rightarrow \hat{x} \neq 0$ (бо $V > 0$ всюди, крім 0). Тоді $\forall t \geq 0$ маємо $x(t + t_n, x_0) = x(t, \underbrace{x(t_n, x_0)}_{\to \hat{x}}) \to x(t, \hat{x})$ (в силу неперервності x як функції своїх аргументів).

Звідси $V(x(t + t_n, x_0)) \to V(x(t, \hat{x})) = C$.

Отже, $\forall t \geq 0\ V(x(t, \hat{x})) = C$, тому $\dot{V}(x(t, \hat{x})) = 0$, $\hat{x} \neq 0$. Але це протирічить умовам, що накладаються в теоремі на $\dot{V}$. Таким чином, $C = 0$ і $V(x(t, x_0)) \to 0$, $t \to \infty$. Для довільного $t_n \to \infty$ по підпослідовності $x(t_n, x_0) \to \hat{x}$ і при цьому $V(x(t_n, x_0)) \to V(\hat{x}) = 0$, тому $\hat{x} = 0$ (тобто збігається до свого якогось елементу, для кожної підпослідовності це може бути своє значення). За лемою 9 $x(t, x_0) \to 0$, $t \to \infty$ (тобто вся послідовність збігається до тієї самої границі), а отже $\bar{x} = 0$ – асимптотично стійкий.

Теорема доведена. □

Зауваження 18. *Якщо $V < 0$, $\dot{V} \geq 0 \Rightarrow V$ – функція Ляпунова.*

Теорема 11 (Ляпунова про нестійкість)**.** *Нехай $\exists V \in \mathcal{C}^1(O_R(0)) : V(0) = 0$, $\dot{V}(x) > 0\ \forall x \in O_R(0) \setminus \{0\}$ і $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon$, $\|x_\varepsilon\| < \varepsilon$: $V(x_\varepsilon) > 0$. Тоді $\bar{x} = 0$ – нестійкий.*

Наслідок 8. *Якщо $V(x) > 0\ \forall x \in O_R(0) \setminus \{0\}$, $\dot{V} > 0\ \forall x \in O_R(0) \setminus \{0\} \Rightarrow \bar{0}$ – нестійкий.*

Доведення. (теореми 11) Візьмемо $r \in (0, R)$. Тоді $\sup\limits_{\|x\| \leq r} |V(x)| \leq M$. Далі для $\forall \varepsilon \in (0, r)\ \exists x_0\ \|x_0\| < \varepsilon$: $V(x_0) = \alpha > 0$.

Покладемо $x(t) = x(t, x_0)$. Тоді для $t > 0$, де $\|x(t)\| \le r$ маємо $\dot{V}(x(t)) = \frac{d}{dt}V(x(t)) > 0$ (за умовою), отже

$$V(x(t)) > V(x_0) = \alpha > 0. \tag{28}$$

Доведемо, що $\exists t_1 > 0\ \|x(t_1)\| > r$ (нестійкість $\bar{x} = 0$). Нехай це не так. Тоді $\forall t \ge 0\ \|x(t)\| \le r$. Тоді в силу(28) $\exists \beta > 0 : 0 < \beta \le \|x(t)\| \le r$.

Дійсно, інакше $x(t_n) \to 0 \Rightarrow V(x(t_n)) \to V(0) = 0$, звідки маємо протиріччя з (28). Покладемо $\gamma := \min\limits_{\beta \le \|x\| \le r} \dot{V}(x) > 0$.

Звідси з $\frac{d}{dt}V(x(t)) = \dot{V}(x(t))$ виводимо

$$V(x(t)) = V(x_0) + \int\limits_0^t \dot{V}(x(s))ds \ge \alpha + \gamma t \to \infty, t \to \infty.$$

Маємо протиріччя з обмеженістю $|V(x)| \Rightarrow$ маємо нестійкість $\bar{x} = 0$.

Теорема доведена. □

Зауваження 19. *Для рівняння $\dot{x} = f(x)$ можемо брати $V(x) = \int\limits_0^t f(s)ds$. Тоді $\dot{V}(x) = V'(x) \cdot f(x) = f^2(x) \ge 0$.*

Приклад 22. *Для рівняння $\dot{x} = x^3(x-1)$ за першим наближенням можна переконатись, що $\bar{x} = 1$ – нестійкий, але про $\bar{x} = 0$ не можемо нічого сказати. Розглянемо функцію Ляпунова у вигляді:*

$$V(x) = \int\limits_0^x s^3(s-1)ds = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} = x^4(\frac{x}{5} - \frac{1}{4}),$$

$$\dot{V}(x) = (x^3(x-1))^2 = x^6(x-1)^2 > 0\ \forall |x| < 1, x \ne 0.$$

і $V(x) < 0$, $|x| < 1$, $x \ne 0$. Тому $\bar{x} = 0$ – асимптотично стійкий.

Приклад 23. *Для рівняння $\dot{x} = x^2(1-x)$ за першим наближенням можна переконатись, що $\bar{x} = 1$ – асимптотично стійкий, адля $\bar{x} = 0$ не можемо нічого сказати. Розглянемо функцію Ляпунова у вигляді:*

$$V(x) = \int\limits_0^t s^2(1-s)ds = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} = x^3(\frac{1}{3} - \frac{x}{4}),$$

$$\dot{V}(x) = x^4(1-x)^2 > 0\ \forall x : |x| < 1, x \ne 0$$

і $V(x) > 0\ \forall x \in (0,1) \Rightarrow \bar{x} = 0$ – нестійке положення рівноваги.

Приклад 24 (Маятник без тертя)**.** *Розглянемо рівняння* $\ddot{x} + a\sin(x) = 0$, $a > 0$.

Перейдемо до системи $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -a\sin(x) \end{cases}$, $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. *Дослідимо на стійкість* $\bar{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Побудуємо функцію Ляпунова

$$V(x,y) = a(1-\cos(x)) + \frac{y^2}{2} \text{ енергетичний інтеграл},$$

$V(0,0) = 0$, $V(x,y) > 0$ *в деякому околі* $\bar{z} = 0$. *Далі*

$$\dot{V}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}\cdot y + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot(-a\sin(x)) = a\sin(x)\cdot y - ay\sin(x) \equiv 0 \le 0,$$

отже $\bar{z} = \bar{0}$ *– стійке.*

При цьому $\forall\{x_0, y_0\} \in \{V(x,y) = C \neq 0\}$ *маємо:*

$$\frac{d}{dt}V(x(t),y(t)) = \dot{V}(x(t),y(t)) \equiv 0 \Rightarrow V(x(t),y(t)) \equiv C \neq 0,$$

отже, $(x(t),y(t)) \nrightarrow (0,0)$, $t \to \infty$. *Тому асимптотичної стійкості немає.*

Приклад 25. *Дослідити на стійкість всі положення рівноваги системи*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 + y \\ \dot{y} = x - y^5 \end{cases}$$

.

Положення рівноваги даної системи

$$\bar{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{z}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{z}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

.

Спочатку використаємо метод першого наближення:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \begin{pmatrix} -3x^2 & 1 \\ 1 & -5y^4 \end{pmatrix}.$$

Для $\bar{z}_2$ *маємо:*

$$\frac{\partial f}{\partial z}(\bar{z}_2) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} < 0,$$

отже, $\bar{z}_2$ *– асимптотично стійке. Для* $\bar{z}_3$ *аналогічно, тому* $\bar{z}_3$ *– асимптотично стійке. Розглянемо* $\bar{z}_1$*:*

$$\frac{\partial f}{\partial z}(\bar{z}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i,$$

отже, за першим наближенням нічого не можемо сказати. Спробуємо метод функції Ляпунова. Спробуємо підібрати $V(x,y)$. *Нехай, наприклад,* $V(x,y) = -\frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^6}{6}$. *При цьому*

$$\dot{V}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}(-x^3+y)+\frac{\partial V}{\partial y}(x-y^5) = (-x^3+y)^2+(x-y^5)^2 > 0,\ |x|<\varepsilon,\ |y|<\varepsilon.$$

При $x = y$ *функція* $V(x,y) > 0$, $|x| < \varepsilon$. *Тому* $\bar{z}_1$ – *нестійке положення рівноваги.*

Наслідок 9. *Нехай для* $\dot{x} = f(x)$, $f(0) = 0$, $f \in \mathbb{C}^1(O_R(0))$ *існує функція Ляпунова в* $O_R(0)$, *і множина* $\{x|\dot{v}(0) = 0\}$ *не містить траєкторій системи, крім* $x \equiv 0$. *Тоді* $\bar{x} = 0$ – *асимптотично стійке.*

Приклад 26. *Розглянемо систему* $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x) - ay \end{cases}$, $a \geq 0$.

Нехай

$$x \cdot f(x) > 0\ \forall x \neq 0\ (\text{наприклад, } f(x) = x^3). \tag{29}$$

Досліджуємо на стійкість $x = 0, y = 0$. *Скористаємось методом функції Ляпунова. Візьмемо*

$$V(x,y) = \frac{y^2}{2} + \int\limits_0^x f(s)ds,\ V(0,0) = 0,$$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}\cdot y + \frac{\partial V}{\partial y}(-f(x)-ay) = f(x)y + y(-f(x)-ay) = -ay^2 \leq 0.$$

Проаналізуємо такі випадки: а) $x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ *з* (29) $\Rightarrow \int\limits_0^x f(s)ds > 0$ $\Rightarrow V(x,y) > 0$;

б) $x < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow \int\limits_0^x f(s)ds = -\int\limits_x^0 f(s)ds > 0.$

Отже, $V(x,y) > 0\ \forall (x,y) \neq (0,0)$.

Якщо $a > 0$, *то* $\dot{V}(x,y) = -ay^2 \leq 0$, $\dot{V}(x,0) = 0$ *(теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість не застосовна в класичному формулюванні).*

Дослідимо множину

$$M = \{(x,y)|\dot{V}(x,y) = 0\} = \{(x,0)|x \in \mathbb{R}\}.$$

Нехай $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in M\ \forall t$, *звідси* $y(t) \equiv 0$, *тому* $x(t) = const$, $f(const) = 0$.

З (29) *маємо, що* $const = 0$. *А це означає, що* $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *і тоді у нас лише траєкторія нуля. Використавши наслідок 9, робимо висновок, що* $x = 0, y = 0$ – *асимптотично стійкий.*

Приклад 27. *Розглянемо систему* $\begin{cases} \dot{x} = -x + f_1(x,y) \\ \dot{y} = -y + f_2(x,y) \end{cases}$ *, де для* f_1, f_2 *виконуються умови:*

- $f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$;
- $|f_1(x,y)| + |f_2(x,y)| \le C(x^2+y^2)$.

Дослідимо на стійкість $x = 0, y = 0$. *Розглянемо функцію* $V(x,y) = x^2 + y^2 > 0 \ \forall (x,y) \neq (0,0)$. *Тоді*

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}(-x + f_1) + \frac{\partial V}{\partial y}(-y + f_2) = 2x(-x + f_1) + 2y(-y + f_2) =$$

$$= 2x^2 - 2y^2 + 2xf_1 + 2yf_2 \le -2x^2 - 2y^2 + x^2 + f_1^2 + y^2 + f_2^2 =$$

$$= -x^2 - y^2 + f_1^2 + f_2^2 \le -x^2 - y^2 + 2C^2(x^2+y^2)^2 \le (\text{виберемо } x^2+y^2 \le R^2 = \frac{1}{4C^2}) \le$$

$$\le -x^2 - y^2 + 2C^2(x^2+y^2) \cdot \frac{1}{4C^2} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2) < 0,$$

отже, $\dot{V}$ *– від'ємно визначена в* $O_R(\bar{0}) \Rightarrow$ *за теоремою Ляпунова про асимптотичну стійкість маємо, що* $x = 0, y = 0$ *– асимптотично стійкий.*

Означення 11. *Положення рівноваги* $\bar{x}$ *називається глобально асимптотично стійким, якщо* $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n \ x(t, x_0) \to \bar{x}$, $t \to \infty$.

Зауваження 20. *Якщо* $\bar{x}$ *– глобально асимптотично стійке положення рівноваги, то* $\bar{x}$ *– єдине положення рівноваги.*

Теорема 12 (Барбашина-Красовського)**.** *Нехай* $\dot{x} = f(x)$, $f(0) = 0$, $f \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^n)$. *Нехай існує* $V \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^n)$ *така, що:*

1) $V(0) = 0$, $V(x) > 0 \ \forall x \neq 0$;

2) $\dot{V}(x) < 0 \ \forall x \neq 0$;

3) $V(x) \to +\infty$, $\|x\| \to \infty$.

Тоді $\bar{x} = 0$ *– глобально асимптотично стійке.*

Доведення. Для $\forall C > 0$ розглянемо $\Omega_C = \{x | V(x) \le C\}$. В силу умови 3) теореми Ω_C – обмежена множина. Візьмемо $\forall x_0 \in \Omega_C$, $x_0 \neq 0 \Rightarrow \forall t > 0$

$$\frac{d}{dt}V(x(t,x_0)) = \dot{V}(x(t,x_0)) < 0 \Rightarrow V(x(t,x_0)) < V(x_0) \le C,$$

а тому $\forall t \ge 0 \ x(t,x_0) \in \Omega_C$.

В силу нерівності $\dot{V} < 0 \ \exists \lim\limits_{t\to\infty} V(x(t,x_0)) = \bar{C} \ge 0$ (така границя існує в силу монотонності функції).

Нехай $\bar{C} > 0$. Оскільки Ω_C – обмежена, то по підпослідовності $x(t_n, x_0) \to \hat{x}$ і $V(x(t_n,x_0)) = V(\hat{x}) = \bar{C}$.

Далі $\forall t \geq 0$, використовуючи напівгрупову властивість, розглянемо

$$x(t+t_n, x_0) = x(t, x(t_n, x_0)) \to x(t, \hat{x}) \Rightarrow$$

$$V(x(t+t_n, x_0)) \to V(x(t, \hat{x})) = \bar{C}.$$

Звідси, $\forall t > 0$

$$V(x(t, \hat{x})) = \bar{C} \Rightarrow \frac{d}{dt} V(x(t, \hat{x})) = \dot{V}(x(t, \hat{x})) = 0 \Rightarrow$$

$$x(t, \hat{x}) = 0 \Rightarrow \hat{x} = 0 \Rightarrow \bar{C} = 0$$

і $x(t, x_0) \to 0$, $t \to \infty$.

Тепер для $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq 0$ покладемо $C_0 = V(x_0) > 0$.

Тоді $x_0 \in \Omega_{C_0} = \{x | V(x) \leq C_0\}$ і з попередніх міркувань $x(t, x_0) \to 0$, $t \to +\infty$.

Теорема доведена. □

Приклад 28. *Розглянемо систему* $\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases}$. *Дослідимо на стійкість* $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$. *Спробуємо спочатку провести дослідження за першим наближенням. Нехай* $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. *Тоді*

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3y^2 \end{pmatrix}, \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{0}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

отже, $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. *Тому* $Re(\lambda_{1,2}) < 0$. *Отже,* $\bar{z} = \bar{0}$ – *асимптотично стійке (локально) положення рівноваги.*

Перевіримо глобальну стійкість. Нехай $V(x, y) = x^2 + y^2 > 0 \ \forall (x, y) \neq (0, 0)$. *Тоді*

$$\dot{V}(x, y) = 2x(-x + y) + 2y(-x - y^3) = -3x^2 - 2y^4 < 0 \ \forall (x, y) \neq (0, 0).$$

Треба перевірити, що для $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $V(z) \to +\infty$, $\|z\| \to \infty$, *де* $\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. *Маємо* $V(z) = x^2 + y^2 = \|z\|^2 \to \infty$, $\|z\| \to \infty$. *Тому виконується умова 3) теореми 12, звідки* $\bar{z} = \bar{0}$ – *глобально асимптотично стійке положення рівноваги.*

Тема 5. ω-граничні точки та ω-граничні множини

Рекомендована література [1, 2, 3, 4]

Спочатку розглянемо наступний приклад:

Приклад 29. *Розглянемо систему* $\begin{cases} \dot{x} = -y - x(x^2+y^2-1) \\ \dot{y} = x - y(x^2+y^2-1) \end{cases}$. *Із системи рівнянь* $\begin{cases} -y - x(x^2+y^2-1) = 0 \\ x - y(x^2+y^2-1) = 0 \end{cases}$ *маємо єдине положення рівноваги* $\bar{x} = \bar{y} = 0$. *Використавши метод першого наближення, будемо мати:*

$$A = Df(\bar{0}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm i,$$

звідки $Re(\lambda_{1,2}) > 0 \Rightarrow \bar{z} = \bar{0}$ *– нестійке.*

В цій системі динаміка не концентрується навколо положення рівноваги. Введемо полярні координати

$$\begin{cases} x(t) = r(t)\cos(\varphi(t)) \\ y(t) = r(t)\sin(\varphi(t)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos(\varphi) - r\sin(\varphi)\dot{\varphi} \\ \dot{y} = \dot{r}\sin(\varphi) + r\cos(\varphi)\dot{\varphi} \end{cases}$$

Тому

$$\begin{cases} \dot{r}\cos(\varphi) - r\sin(\varphi)\dot{\varphi} = r\sin(\varphi) - r\cos(\varphi)(r^2-1) \\ \dot{r}\sin(\varphi) + r\cos(\varphi)\dot{\varphi} = r\cos(\varphi) - r\sin(\varphi)(r^2-1) \end{cases},$$

Далі після перетворень будемо мати

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r^2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\varphi(t) = t + \varphi_0$ *(кут росте).*

Щодо першого рівняння: нас цікавлять лише розв'язки при $r > 0$, *оскільки це радіус, тому* $r = -1$ *не розглядаємо. Отже,* $\forall r_0 > 0\ r(t) \to 1$,

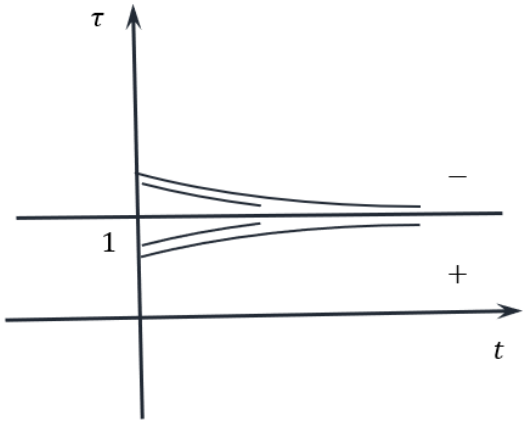


Рис. 15

$t \to \infty$ *(Рис. 15). Але* $r(t) \equiv 1$ *– стаціонарний розв'язок – відповідає замкненій траєкторії вихідної системи:*

$$\Gamma = \{x = \cos(t), y = \sin(t), t \geq 0\}.$$

Довільна траєкторія системи, крім $\bar{z} = \bar{0}$, *наближається до* Γ *при* $t \to +\infty$.

Наслідок 10. *В $\mathbb{R}^2$ можемо спостерігати граничні режими, що не є положеннями рівноваги! (при $r = 1$ маємо фактично коло, а решта траєкторій (незалежно де почались: зовні цього кола чи всередині) будуть наближатися до кола (намотуватись), але не на саме положення рівноваги, тобто є щось, що притягує траєкторії, але це не положення рівноваги - це граничний цикл).*

Розглядаємо

$$\dot{x} = f(x), \tag{30}$$

де $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – локально ліпшицева.

Через $x(t, x_0)$ позначимо розв'язок задачі Коші $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

Вважаємо, що $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ $x(t, x_0)$ існує $\forall t \geq 0$.

Означення 12. *Точка $p \in \mathbb{R}^n$ називається ω-граничною точкою для $x(t, x_0)$, якщо $\exists t_n \nearrow \infty$ така, що $x(t_n, x_0) \to p$, $n \to \infty$.*

Множина всіх ω-граничних точок для $x(t, x_0)$ називається ω-граничною множиною $x(t, x_0)$.

Позначення: $\omega(x_0) = \{p | \exists t_n \nearrow \infty : x(t_n, x_0) \to p, n \to \infty\}$.

Зауваження 21. *Якщо $\exists \lim\limits_{t\to\infty} x(t, x_0) = p$, то $\omega(x_0) = \{p\}$, точка p – положення рівноваги системи (30).*

Дійсно, $x(t_n, x_0) \to p \Rightarrow \forall t \geq 0$ $\underbrace{x(t + t_n, x_0)}_{=x(t,x(t_n,x_0))} \to p$. Отже, $\forall t \geq 0$ $x(t, p) = p$. Отже, точка p – положення рівноваги.

Означення 13. *Множина $M \subset \mathbb{R}^n$ називається додатньо (від'ємно) інваріантною, якщо*

$$\forall t \geq 0 \; x(t, M) \subset M \; (M \subset x(t, M)).$$

Тут і надалі $x(t, M) = \bigcup\limits_{x_0 \in M} x(t, x_0)$.

Множина M – інваріантна, якщо $\forall t \geq 0$ $x(t, M) = M$.

Означення 14. *$M \subset \mathbb{R}^n$ притягує $x(t, x_0)$, якщо $dist(x(t, x_0), M) \to 0$, $t \to \infty$.*

Тут $dist(a, A) = \inf\limits_{b \in A} \|a - b\|$.

Зауваження 22. *Для попереднього прикладу для $z_0 = \bar{0}$ $\omega(z_0) = \{0\}$, а для $z_0 \neq 0$ $\omega(z_0) = \Gamma$.*

Теорема 13 (Властивості ω-граничних множин)**.** *Припустимо, що $\bigcup\limits_{t \geq 0} x(t, x_0)$ – обмежена. Тоді $\omega(x_0) \neq \emptyset$, компактна, зв'язна, інваріантна. Крім того, $\omega(x_0)$ притягує $x(t, x_0)$.*

Доведення. Оскільки траєкторія обмежена, то $K = \overline{\bigcup\limits_{t\geq 0} x(t,x_0)}$ – компакт $\Rightarrow$ $\{t_n \nearrow \infty\}$ послідовність $\{x(t_n,x_0)\} \subset K$. Отже, існує $t_{n_k} \to \infty$: $x(t_{n_k},x_0) \to p \in \omega(x_0) \Rightarrow \omega(x_0) \neq \emptyset$.

Розглянемо еквівалентне представлення для $\omega(x_0)$:

$$\omega(x_0) = \bigcap_{T>0} \overline{\bigcup_{t\geq T} x(t,x_0)}. \tag{31}$$

Дійсно, якщо $p \in \omega(x_0) \Rightarrow p = \lim\limits_{t_n\to\infty} x(t_n,x_0) \Rightarrow \forall T>0\ p \in \overline{\bigcup\limits_{t\geq T} x(t,x_0)} \Rightarrow$ (31).

Якщо $p \in \bigcap\limits_{T>0} \overline{\bigcup\limits_{t\geq T} x(t,x_0)} \Rightarrow \forall n \geq 1\ p \in \overline{\bigcup\limits_{t\geq n} x(t,x_0)} \Rightarrow \exists t_n \geq n$: $\|p - x(t_n,x_0)\| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow p \in \omega(x_0)$.

З (31) маємо, що $\omega(x_0)$ – компакт, зв'язна.

Доведемо інваріантність:
$p \in \omega(x_0),\ t \geq 0 \Rightarrow p = \lim\limits_{t_n\to\infty} x(t_n,x_0),\ x(t+t_n,x_0) \in \overline{\bigcup\limits_{t\geq 0} x(t,x_0)} \Rightarrow$ по підпослідовності $x(t+t_n,x_0) \to p' \in \omega(x_0)$.

З іншого боку, $x(t+t_n,x_0) = x(t,x(t_n,x_0)) \to x(t,p)$.

Звідси $x(t,p) \in \omega(x_0) \Rightarrow \forall t \geq 0\ x(t,\omega(x_0)) \subset \omega(x_0)$ (додатня інваріантність).

Тепер нехай $p \in \omega(x_0) \Rightarrow p = \lim\limits_{t_n\to\infty} x(t_n,x_0) = \lim\limits_{t_n\to\infty} x(t_n - t + t,x_0) = \lim\limits_{t_n\to\infty} x(t, \underbrace{x(t_n - t,x_0)}_{\to p' \in \omega(x_0)}) = x(t,p')$ (бо розв'язок є неперервним як функція початкових даних).

Звідси, $\omega(x_0) \subset x(t,\omega(x_0))$ (від'ємна інваріантність) $\Rightarrow \forall t \geq 0\ \omega(x_0) = x(t,\omega(x_0))$.

Доведемо притягування. Припустимо від супротивного, що $\omega(x_0)$ не притягує $x(t,x_0) \Rightarrow \exists t_n \to \infty\ \exists \varepsilon > 0 : dist(x(t_n,x_0),\omega(x_0)) \subset K \Rightarrow$ по підпослідовності $x(t_n,x_0) \to p \in \omega(x_0) \Rightarrow$ маємо протиріччя.

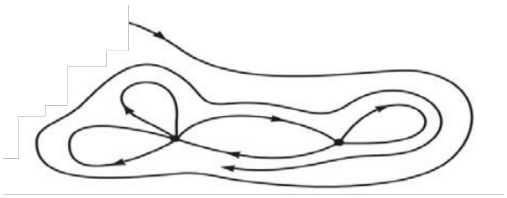
Теорема доведена. □

Зауваження 23. *В $\mathbb{R}$ ω-граничні множини – це положення рівноваги.*

В $\mathbb{R}^2$ ω-граничні множини можуть бути трьох типів (теорія Пуанкаре-Бендіксона):
1) $\omega(x_0) = \{\bar{x}\}$ – положення рівноваги;
2) $\omega(x_0) = \Gamma$ – граничний цикл (періодична траєкторія) (Рис. 16а);
3) $\omega(x_0) =$ зв'язне об'єднання положення рівноваги і повних траєкторій, що їх з'єднують (Рис. 16б).

В $\mathbb{R}^3$ $\omega(x_0)$ можуть мати складну структуру.

(а) “Граничний цикл”



(б) Положення рівноваги і замкнені траєкторії

Рис. 16

Найбільш відомим прикладом є система Лоренца “дивний атрактор” (Рис. 17).

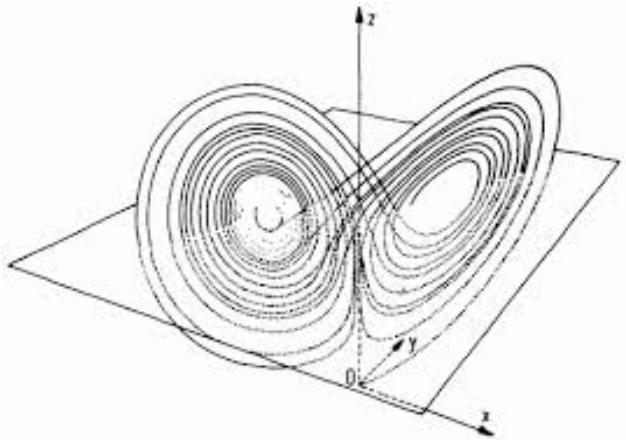


Рис. 17

Тема 6. Принцип інваріантності Ла Саля

Рекомендована література [2]

Розглянемо

$$\dot{x} = f(x), \tag{32}$$

де $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – локально ліпшицева.

Теорема 14. *(принцип інваріантності Ла Саля) Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$ – компактна, додатньо інварінтна ($x(t, D) \subset D \ \forall t \geq 0$), існує $V \in \mathbb{C}^1 : \dot{V}(x) \leq 0$ в D. Розглянемо множину*

$$E = \{x \in D |\ \dot{V}(x) = 0\}.$$

Якщо M – найбільша додатньо інваріантна підмножина в E, то

$$\forall x_0 \in D \ dist(x(t, x_0), M) \to 0, \ t \to \infty.$$

Доведення. Візьмемо $x_0 \in D \Rightarrow \forall t \geq 0\ x(t,x_0) \in D \Rightarrow \forall t > 0$ $\frac{d}{dt}V(x(t,x_0)) = \dot{V}(x(t,x_0)) \leq 0 \Rightarrow t \mapsto V(x(t,x_0)) \searrow$ (монотонно не зростає), то в неї існує скінченна або нескінченна границя. З іншого боку $V \in \mathbb{C}^1 \Rightarrow V$ – неперервна на $D \Rightarrow V$ – обмежена на $D \Rightarrow \exists \lim\limits_{t\to\infty} V(x(t,x_0)) = a\}$ $\Rightarrow \overline{\bigcup\limits_{t\geq 0} x(t,x_0)} \subset D \Rightarrow \omega(x_0) \neq \emptyset$, компактна, зв'язна, інваріантна, притягує $x(t,x_0)$, $\omega(x_0) \in D$.

Розглянемо $\forall p \in \omega(x_0) \Rightarrow$ за означенням $\exists t_n \nearrow \infty : x(t_n,x_0) \to p$, $n \to \infty$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} V(x(t_n,x_0)) = V(p) = a \Rightarrow V(x) \equiv a$ на $\omega(x_0)$ (бо a не залежить від вибору x_0). Оскільки $\omega(x_0)$ – ω-гранична множина, то $\forall p \in \omega(x_0)\ x(t,p) \in \omega(x_0) \Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt}V(x(t,p))}_{=\dot{V}(x(t,p))} = 0\ \forall t \geq 0 \Rightarrow \forall p \in \omega(x_0)\ \dot{V}(p) = 0$ $\Rightarrow p \in E \Rightarrow \omega(x_0) \subset E + \omega(x_0)$ – інваріантна множина $\Rightarrow \omega(x_0) \subset M \subset$ (максимальна додатньо інваріантна множина) $\subset E$. Звідси

$$dist(x(t,x_0),M) \leq dist(x(t,x_0),\omega(x_0)) \to 0, t \to \infty.$$

Теорема доведена. □

Наслідок 11 (про асимптотичну стійкість)**.** *Нехай $\bar{x} = \bar{0}$ – положення рівноваги* (32)*, $\exists O_\delta(\bar{0})$ такий, що $\exists V \in \mathbb{C}^1(O_\delta(\bar{0}))$, V – додатньо визначена в $O_\delta(\bar{0})$, $\dot{V}(x) \leq 0\ \forall x \in O_\delta(\bar{0})$. Якщо множина $S = \{x \in O_\delta(\bar{0}) | \dot{V}(x) = 0\}$ не містить жодної траєкторії системи* (32)*, крім $\bar{0}$, то $\bar{0}$ – асимптотично стійкий розв'язок.*

Доведення. Для заданого $C > 0$ розглянемо множину $D_C = \{x | V(x) \leq C\}$. Оскільки V – неперервна, то $\exists \delta_1 < \delta : O_{\delta_1}(\bar{0}) \subset D_C$ (з неперервності і оскільки $V(0) = 0 < C$). В силу додатньої визначеності функції V для достатньо малих C множина $D_C \subset O_\delta(\bar{0})$.

Звідси маємо, що D_C – компакт, $\dot{V}(x) \leq 0\ \forall x \in D_C \Rightarrow \forall x_0 \in D_C$ $\frac{d}{dt}V(x(t,x_0)) \leq 0 \Rightarrow \forall t \geq 0\ V(x(t,x_0)) \leq V(x_0) \leq C \Rightarrow x(t,x_0) \in D_C$ $\Rightarrow D_C$ – додатньо інваріантна.

За умовою $M = \{\bar{0}\}$ – нульова траєкторія – найбільша додатньо інваріантна підмножина в $E = \{x \in D_C | \dot{V}(x) = 0\} \subset S$.

Тоді згідно принципу інваріантності Ла Саля

$$\forall x_0 \in D_C\ dist(x(t,x_0),M) = \|x(t,x_0)\| \to 0,\ t \to \infty.$$

Звідси $\|x_0\| < \delta_1 \Rightarrow \|x(t,x_0)\| \to 0,\ t \to \infty \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$ – асимптотично стійкий. □

Наслідок 12. *Нехай $\bar{x} = \bar{0}$ – положення рівноваги системи (32), існує $V \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^n)$, V – додатньо визначена в $\mathbb{R}^n$, $V(x) \to +\infty$, $\|x\| \to \infty$, $\dot{V} \leq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.*

Якщо $S = \{x \in \mathbb{R}^n | \dot{V}(x) = 0\}$ не містить жодної траєкторії (32), крім $\bar{0}$, то $\bar{x} = \bar{0}$ – глобально асимптотично стійкий.

Приклад 30. *(маятник з нелінійним тертям) Розглянемо рівняння $\ddot{x} + h(\dot{x}) + a\sin(x) = 0$, $a > 0$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – локально ліпшицева, $h(0) = 0$, $sh(s) > 0$ $\forall s \in (-\alpha, \alpha) \setminus \{0\}$. Наприклад, $h(s) = s^3$.*

Перейдемо до еквівалентної системи:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -a\sin(x) - h(y) \end{cases}$$

і дослідимо на стійкість $\bar{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

За першим наближенням маємо: $A = \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Re(\lambda) = 0$, тому нічого не можемо сказати.

Спробуємо використати метод функції Ляпунова. Нехай $V(x,y) = a(1 - \cos(x)) + \frac{1}{2}y^2$, $V(0,0) = 0$, $V(x,y) > 0$ $\forall (x,y) \in O_\delta(\bar{0}) \setminus \{\bar{0}\}$. Тому

$$\dot{V}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot y + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot (-a\sin(x) - h(y)) =$$

$$(a\sin(x))y + y(-a\sin(x) - h(y)) = -yh(y) \leq 0.$$

Отже, $\dot{V}$ не є від'ємно визначеною, бо $\dot{V}(x,0) = 0$ $\forall x \Rightarrow$ не можемо застосувати теорему Ляпунова про асимптотичну стійкість.

Розглянемо $S = \{(x,y) | \dot{V}(x,y) = 0\} = \{(x,0)\}$.

Припустимо, що $z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in S$ $\forall t \geq 0 \Rightarrow y(t) \equiv 0 \Rightarrow \forall t \geq 0$ $\sin(x(t)) = 0$ (в околі точки (0,0)) $\Rightarrow x(t) \equiv 0 \Rightarrow z(t) \equiv 0 \Rightarrow$ за наслідком $\bar{z} = \bar{0}$ – асимптотично стійкий.

Вправи

1) Для системи $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -g(x)(x + y) \end{cases}$, де g – локально ліпшицева, $g(s) \geq 1$ $\forall s$, довести, що $\bar{z} = \bar{0}$ – глобально асимптотично стійкий.

Вказівка Розглянути $V(x,y) = \int\limits_0^x sg(s)ds + xy + y^2$.

2) Для системи $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -h(x) - g(y) \end{cases}$, де h, g – локально ліпшицеві, $h(0) = g(0) = 0$, $s \cdot h(s) > 0$, $s \cdot g(s) > 0$ $\forall s \in (-\alpha, \alpha) \setminus \{\bar{0}\}$ довести,

що $\bar{z} = \bar{0}$ – асимптотично стійкий (локально).

Вказівка Розглянути $V(x,y) = \int\limits_0^x h(s)ds + xy + \frac{1}{2}y^2$.

3) Знайти ω-граничні множини для наступних систем:

а) $\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dot{x} = x(\mu - x^2 - y^2) - y \\ \dot{y} = y(\mu - x^2 - y^2) + x \end{cases}$

Вказівка

а) Кожне з рівнянь розв'язується окремо.

б) Потрібно здійснити заміну змінних, перейти до полярних координат.

Тема 7. Методи побудови функції Ляпунова

Рекомендована література [1, 2]

1) Розглядаємо лінійну систему

$$\dot{x} = Ax \tag{33}$$

Для лінійної системи $x = 0$ – асимптотично стійкий $\Leftrightarrow \forall\lambda$ – власних чисел A $Re(\lambda) < 0$, тобто A – гурвіцева.

Нехай $V(x) = (Px, x)$, $P = P^*$, $P > 0$ (додатньо визначена) і

$$\dot{V}(x) = (P\dot{x}, x) + (Px, \dot{x}) = (PAx, x) + (Px, Ax) = ((PA + A^*P)x, x) \tag{34}$$

Розглянемо таке рівняння

$$PA + A^*P = -Q \tag{35}$$

Рівняння (35) називається рівнянням Ляпунова.

Теорема 15. *A – гурвіцева $\Leftrightarrow$ для довільної симетричної матриці $Q > 0$ існує єдина симетрична $P > 0$ – розв'язок (35).*

Доведення. Достатність. В силу (34) і (35) маємо $\dot{V}(x) = -(Qx, x) < 0$ $\forall x \neq 0$, $V(x) > 0$ $\forall x \neq 0 \Rightarrow x = 0$ – асимптотично стійкий $\Rightarrow A$ – гурвіцева.

Необхідність. Нехай $\forall\lambda$ – власних чисел A $Re(\lambda) < 0$, $Q = Q^*$, $Q > 0$ – задана матриця. Справедливі оцінки:

$$\begin{aligned} &\|e^{At}\| \leq Me^{-Ct} \\ &\|e^{A^*t}\| \leq Me^{-Ct}, C > 0 \end{aligned} \tag{36}$$

Розглянемо $P = \int\limits_0^\infty e^{A^*t}Qe^{At}dt$, яке існує в силу оцінок (36).

Покажемо, що $P = P^*$. Дійсно,

$$P^* = \int_0^\infty \left(e^{At}\right)^* Q \left(e^{A^*t}\right)^* dt =$$

$$\int_0^\infty e^{A^*t} Q e^{At} dt = P.$$

Тепер покажемо, що $P > 0$. Дійсно, для $x \neq 0$

$$(Px, x) = \int_0^\infty \left(Q \underbrace{e^{At}x}_{y}, \underbrace{e^{At}x}_{y} \right) dt > 0 \ \forall y \neq 0.$$

При цьому, якщо $y = 0 = e^{At}x = 0 \ \forall t \geq 0 \Rightarrow$ при $t = 0$ $x = 0$. Отже, маємо протиріччя, тому $(Px, x) > 0$.

Покажемо, що P задовольняє (35). Дійсно,

$$PA + A^*P = \int_0^\infty e^{A^*t} Q \underbrace{e^{At}A}_{\frac{d}{dt}e^{At}} dt +$$

$$+ \int_0^\infty \underbrace{A^* e^{A^*t}}_{\frac{d}{dt}e^{A^*t}} Q e^{At} dt = \{\text{інтегруємо частинами}\}$$

$$= e^{A^*t} Q e^{At}|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{A^*t}\right) Q e^{At} dt +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{A^*t}\right) Q e^{At} dt = \{\text{в силу оцінок (36)}\}$$

$$= -e^{A^*t}|_{t=0} Q e^{At}|_{t=0} = -Q.$$

Отже, P – розв'язок рівняння (35).

Доведемо єдиність. Нехай $\exists \bar{P}$ – розв'язок (35). Тому маємо

$$(P - \bar{P})A + A^*(P - P^*) = 0$$

Після перетворень отримаємо

$$\frac{d}{dt}\left\{e^{A^*t}(P - \bar{P})e^{At}\right\} = 0$$

Звідси

$$e^{A^*t}(P-\bar{P})e^{At} \equiv \underbrace{P-\bar{P}}_{\text{стала матриця в принципі, зокрема, для } t=0} \qquad \forall t \geq 0,$$

при $t \to \infty$ маємо $e^{A^*t} \to 0$, $e^{At} \to 0$, тому $P - \bar{P} \to 0 \Rightarrow P = \bar{P}$.

Теорема доведена. □

Приклад 31. *Розглянемо систему* $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x - 3y \end{cases}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2 \Rightarrow A$ *– гурвіцева.*

Запишемо рівняння Ляпунова

$$PA + A^*P = -Q,$$

де $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *– симетрична, додатньо визначена. Нехай* $P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, *бо симетрична.*

Тепер рівняння Ляпунова має вигляд:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -4b & a-3b-2c \\ a-3b-2c & 2b-6c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$V(x,y) = \left(P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}(5x^2 + 2xy + y^2)$$

2) **Метод змінного градієнта.** Розглядаємо систему

$$\dot{x} = f(x) \tag{37}$$

Нехай задана функція V,

$$g(x) = \nabla V(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^T,$$

$$\dot{V}(x) = (g(x), f(x)).$$

Задача: вибрати $g(x)$ так, щоб g була градієнтом даної функції V і при цьому $\dot{V} \leq 0$.

Відомо: $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ є градієнтом деякої функції $\Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial x}$ – симетрична: $\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}\ \forall i, j = \overline{1, n}$.

Функція V може бути знайдена у наступному вигляді:

$$V(x) = \int\limits_0^{x_1} g_1(y_1, 0, \ldots, 0)dy_1 + \int\limits_0^{x_2} g_2(x_1, y_2, 0, \ldots, 0)dy_2 + \ldots + \int\limits_0^{x_n} g_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n)dy_n$$

Приклад 32. *Розглянемо систему* $\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = -x_1^3 - x_2 \end{cases}$. *Дослідимо на стійкість* $\bar{x} = \bar{0}$. *Оскільки* $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *– матриця першого наближення, то* $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ *– нічого не можна сказати за першим наближенням.*

Спробуємо найпростіший вигляд $V = x_1^2 + x_2^2$, $\dot{V} = 2x_1x_2 + 2x_2(-x_1^3 - x_2)$ *– не видно знакосталості.*

Спробуємо взяти інтеграли для функції V*:*

$$V = \frac{x_2^2}{2} + \left(-\frac{x_1^4}{4} - \frac{x_2^2}{2}\right) = -\frac{x_1^4}{4},$$

$$\dot{V} = -\frac{1}{4}x_1^3 \cdot x_2,$$

знову нічого не можемо сказати.

Використаємо метод змінного градієнта: потрібно знайти функцію $g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$ *таку, що* $\frac{\partial g_1}{\partial x_2} = \frac{\partial g_2}{\partial x_1}$, $(g, f) = g_1x_2 - g_2x_1^3 - g_2x_2 < 0$. *Функцію* V *представимо наступним чином:*

$$V(x_1, x_2) = \int\limits_0^{x_1} g_1(y_1, 0)dy_1 + \int\limits_0^{x_2} g_2(x_1, y_2)dy_2.$$

Виберемо $g = \begin{pmatrix} a(x_1)x_1 + \gamma x_2 \\ \gamma x_1 + bx_2 \end{pmatrix}$ *(стандартний підхід). Тоді* $\frac{\partial g_1}{\partial x_2} = \gamma = \frac{\partial g_2}{\partial x_1}$,

$$(g, f) = g_1x_2 - g_2(x_1^3 + x_2) = (ax_1 + \gamma x_2)x_2 - (\gamma x_1 + bx_2)(x_1^3 + x_2) =$$

$$= a(x_1)x_1x_2 + \gamma x_2^2 - \gamma x_1^4 - bx_1^3x_2 - \gamma x_1x_2 - bx_2^2 =$$

$$= (\gamma = b, a(x_1) = bx_1^2 + \gamma = \gamma(x_1^2 + 1)) = -\gamma x_1^4 \leq 0.$$

Нехай $\gamma = b = 1$, $a(x_1) = x_1^2 + 1$, *тоді* $g = \begin{pmatrix} (x_1^2 + 1)x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$. *Звідси*

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_1^4 \leq 0,$$

$$V(x_1,x_2)=\int\limits_0^{x_1}(y_1^2+1)y_1dy_1+\int\limits_0^{x_2}(x_1+y_2)dy_2=$$

$$\frac{x_1^4}{4}+\underbrace{\frac{x_1^2}{2}+x_1x_2+\frac{x_2^2}{2}}_{\geq 0}\geq 0\{\textit{навіть} >0\}.$$

Отже, V – додатньо визначена, а тому $\bar{0}$ – стійкий розв'язок.

Вправа. Довести, що $\bar{0}$ – асимптотично стійкий.

Теорема 16 (Обернена теорема Ляпунова)**.** *Нехай $f\in\mathbb{C}^1(O_\delta(\bar{0}))$, $f(\bar{0})=0$, $\bar{x}=\bar{0}$ – стійке (асимптотично стійке) положення рівноваги. Тоді в деякому околі $\bar{0}$ існує V – функція Ляпунова для (37) ($\dot{V}<0$).*

Зауваження 24. *Для лінійної системи $\dot{x}=Ax$ є справедливими наступні твердження: $\bar{x}=\bar{0}$ – асимптотично стійке $\Leftrightarrow\forall\lambda$ – власних чисел матриці A $Re(\lambda)<0$. Для нелінійних систем це не так. Тобто, якщо $\bar{x}=\bar{0}$ – симптотично стійке $\not\Rightarrow$ для $A=\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{0})$ виконується $Re(\lambda)<0$.*

Приклад 33. *Розглянемо задачу* $\begin{cases}\dot{x}=-x^3\\ x(0)=x_0\end{cases}$. *Отже,* $x(t)=\sqrt{\frac{1}{2t+\frac{1}{x_0^2}}}\to 0$, $t\to\infty$, $\bar{x}=0$ – *асимптотично стійкий,* $f'(0)=0$ – *не є гурвіцевою. Тобто може бути асимптотична стійкість, але не експоненціальна швидкість.*

Доведення. (теореми) Припустимо, що $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{0})$ – гурвіцева (це припущення сильно спростить міркування в доведенні) $\Rightarrow\exists K>0\ \exists N(\bar{0})\ \exists\lambda>0:$

$$\forall x_0\in N(\bar{0})\ \|\Phi(t,x)\|\leq K\|x\|e^{-\lambda t},$$

де $\Phi(t,x)$ – розв'язок, що стартує з x. Покладемо $V(x)=\int\limits_0^\delta\|\Phi(\tau,x)\|^2d\tau$, $\delta>0$ виберемо пізніше.

В деякому околі $V(x)>0\ \forall x\in N(\bar{0})\setminus\{0\}$, $V(0)=0$,

$$\frac{d}{dt}V(\Phi(t,x))=\frac{d}{dt}\int\limits_0^\delta\|\underbrace{\Phi(\tau,\Phi(t,x))}_{\Phi(t+\tau,x)}\|^2d\tau=$$

$$=\frac{d}{dt}\int\limits_0^\delta\|\Phi(t+\tau,x)\|^2d\tau=\left|\begin{array}{l}t+\tau=s\\ d\tau=ds\\ s\in[t,\delta+t]\end{array}\right|=$$

$$= \frac{d}{dt}\int\limits_{t}^{t+\delta} \|\Phi(s,x)\|^2 ds = \|\Phi(t+\delta,x)\|^2 - \|\Phi(t,x)\|^2,$$

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}V(\Phi(t,x))|_{t=0} = \|\Phi(\delta,x)\|^2 - \|x\|^2 \le \|x\|^2\left(K^2 e^{-2\lambda\delta} - 1\right) < 0$$

для достатньо великих $\delta \Rightarrow V$ – шукана функція. □

Приклад 34. *Розглянемо систему* $\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = -\varphi(x_1)(x_1 + x_2) \end{cases}$. *Нехай* $\varphi(s) \ge 1\ \forall s \in \mathbb{R}$, $\varphi(0) = 1$. *Наприклад,* $\varphi(s) = 1 + s^2$. *Дослідиї на стійкість тривіальний розв'язок методом змінного градієнта. Потрібно знайти функцію* g. *Нехай* $g(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} a(x_1)x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$, $\frac{\partial g_1}{\partial x_2} = \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \Rightarrow$ $g = \nabla V$.

Виберемо a *так, щоб* $(g,f) \le 0$,

$$(g,f) = g_1 f_1 + g_2 f_2 = (a(x_1)x_1 + x_2)x_2 - (x_1 + x_2)\varphi(x_1)(x_1 + x_2) =$$

$$= ax_1x_2 + x_2^2 - \varphi x_1^2 - \varphi 2x_1x_2 - \varphi x_2^2 = (a = 2\varphi) =$$

$$= x_2^2 - \varphi x_1^2 - \varphi x_2^2 = x_2^2(\underbrace{1-\varphi}_{\le 0}) - \underbrace{\varphi x_1^2}_{\le 0} \le 0,$$

випадок " $=$" $\Leftrightarrow x_1 = 0$, *але тоді* $\forall x_2$ *маємо* $x_2^2(1-\varphi) = 0$. *Тому* (g,f) *не є від'ємно визначеною. Визначимо*

$$V = \int\limits_0^{x_1} 2\varphi(y_1)y_1 dy_1 + \int\limits_0^{x_2}(x_1 + y_2)dy_2 =$$

$$= 2\int\limits_0^{x_1} \underbrace{\varphi(y_1)}_{\ge 1} y_1 dy_1 + x_1x_2 + \frac{x_2^2}{2} \ge$$

$$x_1^2 + x_1x_2 + \frac{x_2^2}{2} = \frac{1}{2}(x_1^2 + (x_1 + x_2)^2) > 0,$$

випадок " $= 0$" $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$. *Функція* V – *додатньо визначена,* $\dot{V} \le 0$ $\Rightarrow \bar{0}$ – *стійке положення рівноваги.*

Перевіримо асимптотичну стійкість. Розглянемо $E = \{x | \dot{V}(x) = 0\} = \{x_1 = 0\}$. *Нехай* $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ – *розв'язок,* $\forall t \ge 0$ $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \in E \Rightarrow$ $x_1(t) \equiv 0 \Rightarrow x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow$ *за принципом інваріантності Ла Саля* $\bar{0}$ – *асимптотично стійкий розв'язок.*

Тема 8. Стійкість лінійних систем

Рекомендована література [5, 6, 7]

Розглядаємо систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), \tag{38}$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n \ \forall t,\ A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) \dots a_{1n}(t) \\ \dots \\ a_{n1}(t) \dots a_{nn}(t) \end{pmatrix},\ a_{ij} \in \mathbb{C}([0,+\infty)),\ f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},\ f_i \in \mathbb{C}([0,+\infty)).$

Відомо, що розв'язок (38) існує там, де неперервна права частина. Також відомо, що $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ розв'язок (38) $x = x(t)$, $x(0) = x_0$ існує, єдиний, визначений на $[0,+\infty)$.

Розглянемо лінійну однорідну систему (ЛОС):

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t). \tag{39}$$

Нехай $Y(t)$ – фундаментальна матриця системи (39), тобто

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t)\ x_1^{(2)}(t) \dots x_1^{(n)}(t) \\ \dots \\ x_n^{(1)}(t)\ x_n^{(2)}(t) \dots x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix},$$

де $x^{(j)}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(j)} \\ \vdots \\ x_n^{(j)} \end{pmatrix}$ – розв'язок (39), $\{x^{(j)}\}$ – лінійно незалежні.

Нагадаємо, що $Y(t)$ – фундаментальна матриця $\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{Y}(t) = A(t)Y(t) \\ detY(t) \neq 0 \end{cases}$, тобто ця система повністю характеризує те, що $Y(t)$ – фундаментальна матриця.

Для $Y(t)$ має місце формула Якобі: $detY(t) = detY(0)e^{\int_0^t trA(s)\,ds}$.

Фундаментальна матриця визначається неоднозначно в наступному сенсі: для довільної сталої матриці C, $detC \neq 0$ матриця $Y(t)C$ – фундаментальна матриця для (39). Зокрема, $Y(t) = Y(t) \cdot Y^{-1}(0)$, $Y(0) = E$. В силу теореми про існування і єдиність розв'язку задачі Коші, така фундаментальна матриця єдина.

Нехай $Y(t)$ – фундаментальна матриця, $Y(0) = E$. Тоді розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

визначається наступною формулою:

$$x(t) = Y(t)x_0$$

Зауваження 25. *Якщо* $A(t) \equiv A$, *то* $Y(t) = e^{At}$.
Але, якщо $A(t) \neq A$, *то матрична експонента не дає розв'язок.*

Зауваження 26. *Система* 2×2 *зі змінною матрицею може не інтегруватись в квадратурах.*

Формула варіації довільної сталої: нехай $Y(t)$ – фундаментальна матриця системи (39), $Y(0) = E$. Тоді розв'язок (38) для довільної $f(t)$ і для довільних початкових даних $x(0) = x_0$ задається наступною формулою:

$$x(t) = \underbrace{Y(t)x_0}_{\text{розв'язок ЛОС}} + \underbrace{Y(t)\int\limits_0^t Y^{(-1)}(s)f(s)ds}_{\text{частковий розв'язок ЛНС}}$$

Виведемо цю формулу. Маємо, що $x(0) = x_0$,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dY}{dt}x_0 + \frac{dY}{dt}\int\limits_0^t Y^{-1}(s)f(s)ds + Y(t)Y^{-1}(t)f(t) =$$

$$= A(t)\left(Y(t)x_0 + Y(t)\int\limits_0^t Y^{-1}(s)f(s)ds\right) + f(t) = A(t)x(t) + f(t),$$

отже, $x(t)$ – розв'язок (38).

З формули варіації довільної сталої маємо: якщо досліджується на стійкість розв'язок $\bar{x}$ системи (38), то нам потрібно оцінити різницю $\|\bar{x}(t) - x(t)\|$, де x – розв'язок (38). Тому якщо

$$\bar{x}(t) = Y(t)\bar{x}(0) + Y(t)\int\limits_0^t Y^{-1}(s)f(s)ds,$$

$$x(t) = Y(t)x(0) + Y(t)\int\limits_0^t Y^{-1}(s)f(s)ds,$$

то $\|\bar{x} - x\| = \|Y\bar{x}_0 - Yx_0\|$. Тому $\bar{x}$ – стійкий (асимптотично стійкий, нестійкий) розв'язок (38) $\Leftrightarrow$ стійким (асимптотично стійким, нестійким) є розв'язок $x \equiv 0$ відповідної ЛОС (39). Причому всі розв'язки (38) і (39) щодо стійкості ведуть себе одинаково. Тому говорять про стійкість (асимптотичну стійкість, нестійкість) всієї системи (39).

Теорема 17 (про стійкість лінійної системи). *Нехай $Y(t)$ – довільна фундаментальна матриця системи* (39). *Тоді:*
а) (39) *– стійка* $\Leftrightarrow \sup\limits_{t\geq 0}\|Y(t)\| \leq K$;
б) (39) *– асимптотично стійка* $\Leftrightarrow \|Y(t)\| \to 0,\ t \to +\infty$.

Наслідок 13. *Справедливими є наступні твердження:*
• (39) *– стійка* $\Leftrightarrow$ *довільний розв'язок* (39) *є обмеженим;*
• (39) *– асимптотично стійка* $\Leftrightarrow$ *довільний розв'язок* (39) *прямує до 0 при* $t \to \infty$.

Доведення. (теореми 17) Вважаємо, що $Y(0) = E$. Тоді розв'язок (39) з $x(0) = x_0$ визначається як $x(t, x_0) = Y(t)x_0$.
а) Доведемо достатність. Нехай $\forall \varepsilon > 0\ \delta = \frac{\varepsilon}{K}$ (K - з оцінки для фундаментальної матриці) і $\|x_0\| < \delta$, тому

$$\forall t \geq 0\ \|x(t, x_0) - 0\| = \|x(t, x_0)\| \leq \|Y(t)\| \cdot \|x_0\| \leq K\|x_0\| < \varepsilon,$$

отже, (39) – стійка.
Доведемо необхідність. Нехай $x = 0$ – стійкий і, від супротивного, нехай $\exists t_n \nearrow \infty : \|Y(t_n)\| \to \infty$. Тоді існує розв'язок $\bar{x}$: $\|\bar{x}(t_n)\| \to \infty$.

Маємо $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \|x_0\| < \delta$, звідки $\|x(t, x_0)\| < \varepsilon\ \forall t \geq 0$. Розглянемо $\hat{x}(t) = \frac{\delta}{2}\frac{\bar{x}(t)}{\|\bar{x}(0)\|}$ – розв'язок (39), $\|\hat{x}(0)\| = \delta/2 < \delta$. Отже, $\forall t \geq 0\ \|\hat{x}(t)\| < \varepsilon$. Але $\|\hat{x}(t_n)\| = \frac{\delta}{2}\frac{\|\bar{x}(t_n)\|}{\|\bar{x}(0)\|} \to \infty$, звідки маємо протиріччя з припущенням.
б) Доведемо достатність. Нехай

$$\|x(t, x_0)\| \leq \|Y(t)\| \cdot \|x_0\| \to 0, t \to \infty,$$

отже, (39) –асимптотично стійкий.

Доведемо необхідність.Маємо, що із того, що $\|x_0\| < \delta$ випливає, що $\|x(t, x_0)\| \to 0,\ t \to \infty$. Для довільного $\bar{x}(t)$ – стовпця $Y(t)$ маємо, що $\hat{x} := \frac{\delta}{2}\frac{\bar{x}(t)}{\|\bar{x}(0)\|}$, $\|\hat{x}(0)\| < \delta$. Отже, $\|\hat{x}(t)\| \to 0,\ t \to \infty$ і $\|\hat{x}(t)\| \to 0,\ t \to \infty$, тому $\|Y(t)\| \to 0,\ t \to \infty$.

Теорема доведена. □

Наслідок 14. *Якщо $A(t) \equiv A$, то $Y(t) = e^{At}$, отже* (39) *– асимптотично стійка* $\Leftrightarrow \forall \lambda$ *– власних чисел матриці A маємо, що $Re(\lambda) < 0$ і в цьому випадку $\|e^{At}\| \leq Ce^{-\gamma t}$, $\gamma > 0$. Далі,* (39) *– стійка* $\Leftrightarrow Re(\lambda) \leq 0$, *а для $Re(\lambda) = 0$ кратність λ співпадає з $n - rank(A - \lambda E)$ і в цьому випадку $\|e^{At}\| \leq C$.*

Теорема 18 (про оцінку норми розв'язку ЛОС). *Для довільного $x_0 \in \mathbb{R}^n$ для довільного $t \geq 0$ має місце наступна оцінка:*

$$\|x_0\|e^{-\int\limits_0^t \|A(s)\|ds} \leq \|x(t, x_0)\| \leq \|x_0\|e^{\int\limits_0^t \|A(s)\|ds}.$$

Доведення. Для задачі Коші $\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ розглянемо $x(t) = x_0 + \int\limits_0^t A(s)x(s)ds$. Тоді

$$\|x(t)\| \le \|x_0\| + \int\limits_0^t \|A(s)\| \cdot \|x(s)\| ds.$$

Використавши нерівність Гронуола в інтегральній формі, отримаємо:

$$\|x(t)\| \le \|x_0\| e^{\int\limits_0^t \|A(s)\| ds}.$$

Для $t \in [-T, 0]$ покладемо $\bar{x}(t) = x(-t)$, $x(\cdot)$ – розв'язок (39). Тоді на $[-T, 0]$ маємо:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = -\frac{dx(-t)}{d(-t)} = -A(-t)x(-t) = -A(-t)\bar{x}(t)$$

звідки

$$\bar{x}(0) = \bar{x}(-T) - \int\limits_{-T}^0 A(-s)\bar{s} ds$$

$$\Rightarrow \|\bar{x}(0)\| \le \|\bar{x}(-T)\| e^{\int\limits_{-T}^0 \|A(-s)\| ds}$$

$$\Rightarrow \|x(0)\| \le \|x(T)\| e^{\int\limits_0^T \|A(s)\| ds}$$

$$\Rightarrow \|x(t)\| \ge \|x_0\| e^{-\int\limits_0^T \|A(s)\| ds}$$

Теорема доведена. □

Теорема 19 (Про асимптотичну рівновагу)**.** *Нехай* $\int\limits_0^\infty \|A(t)\| dt = K < \infty$. *Тоді* (39) *стійка, і для довільного розв'язку* (39) $x(t)$ *існує* $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = c \in \mathbb{R}^n$. *І навпаки,* $\forall x \in \mathbb{R}^n$ *існує розв'язок* $x(t)$ *такий, що* $c = \lim\limits_{t\to\infty} x(t)$.

Доведення. З теореми 18 $\forall t \ge 0$ маємо

$$\|x(t, x_0)\| \le \|x_0\| e^{\int\limits_0^t \|A(s)\| ds} \le \|x_0\| e^K$$

Отже, довільний розв'язок є обмеженим і система (39) – стійка.

Для розв'язку $x(t)$ маємо:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

$$\Rightarrow \|\dot{x}(t)\| \le \|A(t)\| \cdot \|x(t)\| \le \|A(t)\| \cdot \|x_0\| e^K$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \|\dot{x}(t)\| dt \le \int_0^\infty \|A(t)\| \cdot \|x_0\| e^K dt = K\|x_0\| e^K < \infty$$

$$\Rightarrow \exists \int_0^\infty \dot{x}(t)dt = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \dot{x}(s)ds =$$

$$= \lim_{t\to\infty} (x(t) - x_0) \Rightarrow \exists \lim_{t\to\infty} x(t) =: c$$

Тепер нехай $c \in \mathbb{R}^n$ – фіксоване, $Y(t) = (y^{(1)}(t), \dots, y^{(n)}(t))$ – фундаментальна матриця, $Y(0) = E$.

З попередніх міркувань $\exists \lim_{t\to\infty} y^{(i)}(t) = c^{(i)} \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1,n}$. Покладемо $C = (c^{(1)}, \dots, c^{(n)})$. З формули Якобі маємо:

$$detY(t) = e^{\int_0^t trA(s)ds} \Rightarrow$$

$$det(C) = \lim_{t\to\infty} detY(t) = \lim_{t\to\infty} e^{\int_0^t trA(s)ds} = e^{\int_0^\infty A(s)ds} \neq 0.$$

Отже, $\{c^{(i)}\}_{i=1}^n$ – ЛНЗ, тобто $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$: $c = \sum_{i=1}^n \alpha_i c^{(i)}$.

Розглянемо $x(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y^{(i)}(t)$ – розв'язок (39) і

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lim_{t\to\infty} y^{(i)}(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i c^{(i)} = c.$$

Теорема доведена. □

Приклад 35. *Розглянемо систему:*

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(-1 + \frac{3}{2}\cos^2(t)\right) x + \left(1 - \frac{3}{2}\sin(t)\cos(t)\right) y \\ \dot{y} = \left(-1 - \frac{3}{2}\sin(t)\cos(t)\right) x + \left(1 + \frac{3}{2}\sin^2(t)\right) y \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є наступна вектор-функція

$$\begin{cases} x(t) = e^{\frac{1}{2}t}\cos(t) \\ y(t) = -e^{\frac{1}{2}t}\sin(t) \end{cases}$$

Цей розв'язок є необмеженим при $t \to \infty$, тому система є нестійкою.

Але, з іншої сторони, розглянемо матрицю цієї системи:

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2(t) & 1 - \frac{3}{2}\sin(t)\cos(t) \\ -1 - \frac{3}{2}\sin(t)\cos(t) & 1 + \frac{3}{2}\sin^2(t) \end{pmatrix}$$

Власні числа цієї матриці $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}i$, *тобто* $Re(\lambda_{1,2}) < 0$. *Але стандартний апарат через власні числа тут не працює.*

Приклад 36. *Розглянемо систему*

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{y}{1+t^2} + \frac{e^{-t}}{1+t^2} \\ \dot{y} = xe^{-t} \end{cases}$$

Відомо, що $\begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$ *– частковий розв'язок системи. Потрібно довести, що довільний розв'язок системи є обмеженим і існує* $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$. *З формули варіації довільної сталої маємо, що загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи (ЛНС) це сума загального розв'язку ЛОС і частковий розв'язок ЛНС.*

Частковий розв'язок є обмеженою функцією і існує $\lim\limits_{t\to\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Відповідна однорідна система має вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{y}{1+t^2} \\ \dot{y} = xe^{-t} \end{cases}$$

з матрицею $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1+t^2} \\ e^{-t} & 0 \end{pmatrix}$, *тому*

$$\int\limits_0^\infty \|A(t)\|dt = \int\limits_0^\infty \sqrt{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 + (e^{-t})^2}dt \le \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{1+t^2} + e^{-t}\right)dt = \frac{\pi}{2}+1 < \infty.$$

Отже, довільний розв'язок ЛОС є обмеженим і існує границя при $t \to \infty$.

Знову розглянемо лінійну однорідну систему

$$\dot{x} = A(t)x \tag{40}$$

Теорема 20 (Про стійкість ЛОС зі знаковизначеною матрицею)**.** *Мають місце наступні твердження:*

1) Якщо $A + A^T \le 0$, *то* (40) *– стійка. Причому, якщо* $\int\limits_0^t trA(s)ds \to -\infty$, $t \to +\infty$, *то існує нетривіальний розв'язок, що прямує до 0 при* $t \to \infty$.
2) Якщо існує $\alpha > 0$: $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ *виконується* $((A + A^T)\xi, \xi) \le -\alpha\|\xi\|^2$, *то система* (40) *– асимптотично стійка.*

Зауваження 27. *Якщо $A(t) \equiv A$, то пункт 2 означає, що $A + A^T < 0$, а це, в свою чергу, означає, що $\forall \lambda\ Re(\lambda) < 0$.*

Доведення. (теореми 20) Домноживши систему (40) на $x(t)$, отримаємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 = (A(t)x(t), x(t))$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 = \left(\left(A + A^T\right)x, x\right).$$

Нехай виконуються умови пункту 2). Тоді

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 \leq -\alpha\|x(t)\|^2 \Rightarrow \|x(t)\|^2 \leq \|x(0)\|^2 e^{-\alpha t} \to 0, t \to +\infty.$$

Тобто маємо, що (40) – асимптотично стійка.

Нехай тепер виконуються умови пункту 1). Тоді

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 \leq 0, \tag{41}$$

звідки $\|x(t)\|^2 \leq \|x(0)\|^2$, а отже, всі розв'язки обмежені. Тому (40) – стійка.

Зокрема, з (41) маємо, що функція $t \mapsto \|x(t)\|^2$ монотонно не зростає, отже існує $\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t)\|$.

Для довільних розв'язків (40) $y(t)$ і $z(t)$:

$$\| \underbrace{y(t) + z(t)}_{\text{розв'язок (40)}} \|^2 = \| \underbrace{y(t)}_{\text{розв'язок (40)}} \|^2 + 2(y(t), z(t)) + \| \underbrace{z(t)}_{\text{розв'язок (40)}} \|^2,$$

тому існує $\lim\limits_{t\to\infty}(y(t), z(t))$.

Нехай $Y(t) = (x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n)}(t))$ – фундаментальна матриця і

$$Y^T(t) = \begin{pmatrix} x^{(1)}(t)\ldots \\ x^{(n)}(t)\ldots \end{pmatrix}.$$

Отже, існує $\lim\limits_{t\to\infty} Y^T(t)Y(t) =: D$, D – симетрична, $Y^T \cdot Y = (detY(t))^2$. Тому існує $\lim\limits_{t\to\infty}(detY(t))^2 = det(D)$.

Для розв'язку (40) маємо

$$x(t) = Y(t)c,\ c \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|x(t)\|^2 = (x(t), x(t)) = \left(Y^T \cdot Yc, c\right) \Rightarrow \exists \lim_{t\to\infty}\|x(t)\|^2 = (Dc, c) \geq 0.$$

Нехай $\lambda = \inf\limits_{\|x\|=1}(Dx, x)$ – найменше власне число D.

Якщо для деякого $c_0 \neq 0$ $(Dc_0, c_0) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \exists c \neq 0 : Dc = 0 \cdot c = 0 \Rightarrow det(D) = 0$.

Існування такого c_0 означає, що для відповідного розв'язку $x(t) = Y(t)c_0$ маємо, що $\|x(t)\|^2 \to (Dc_0, c_0) = 0$ при $t \to \infty$.

За формулою Якобі:

$$det(Y(t)) = det(Y(0))e^{\int_0^t tr(A)ds}$$

$$\Rightarrow det(D) = 0 \Leftrightarrow e^{\int_0^t tr(A)ds} \to 0,\ t \to \infty$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t tr(A)ds \to -\infty.$$

□

Приклад 37. *Розглянемо систему*

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + \sin(t) \cdot y \\ \dot{y} = \sin(t) \cdot x - 2y \end{cases}$$

Доведемо, що всі розв'язки прямують до нуля при $t \to \infty$.

Матриця системи $\begin{pmatrix} -2 & \sin(t) \\ \sin(t) & -2 \end{pmatrix}$ *– симетрична. Потрібно показати, що* $\forall \xi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *виконується нерівність* $(A(t)\xi, \xi) \le -\alpha\|\xi\|^2$. *Розглянемо*

$$A(t)\xi = \begin{pmatrix} -2 & \sin(t) \\ \sin(t) & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a + b\sin(t) \\ a\sin(t) - 2b \end{pmatrix}.$$

Тому

$$(A(t)\xi, \xi) = \left(\begin{pmatrix} -2a + b\sin(t) \\ a\sin(t) - 2b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) =$$

$$= -2a^2 + 2ab\sin(t) - 2b^2 \le -a^2 - b^2 - (a-b)^2 \le -1(a^2 + b^2) = -\|\xi\|^2.$$

Отже, за теоремою 20 система асимптотично стійка, тому всі розв'язки прямують до нуля при $t \to \infty$.

Нехай A – стала матриця. Розглянемо систему

$$\dot{x} = Ax \tag{42}$$

і систему

$$\dot{x} = (A + B(t))x. \tag{43}$$

З'ясуємо властивість стійкості (43) за властивістю стійкості (42).

Теорема 21. *(про стійкість ЛОС з майже сталою матрицею). Якщо* (42) *– стійка,* $\int_0^\infty \|B(t)\|dt < \infty$, *то* (43) *– стійка.*

Доведення. Нехай $Y(t) = e^{At}$ – фундаментальна матриця (42), $\sup\limits_{t\geq 0} \|Y(t)\| \leq K$.

Запишемо (43) наступним чином: $\dot{x} = Ax + B(t)x$ і розглянемо систему (43) як неоднорідну з $f(t) = B(t)x$. З формули варіації довільної сталої маємо:

$$x(t) = e^{At} \cdot x_0 + \int\limits_0^t e^{A(t-s)} B(s)x(s)ds$$

$$\Rightarrow \|x(t)\| \leq K\|x_0\| + \int\limits_0^t K\|B(s)\| \cdot \|x(s)\|ds.$$

З нерівності Гронуола маємо:

$$\|x(t)\| \leq K \cdot \|x_0\| \cdot e^{K\int\limits_0^t \|B(s)\|ds} \leq K\|x_0\| e^{K\int\limits_0^\infty \|B(s)\|ds} < \infty,$$

отже, довільний розв'язок є обмеженим, а це і означає стійкість системи (43). □

Приклад 38. *Розглянемо систему*

$$\begin{cases} \dot{x} = x + (e^{-t} - 2)y \\ \dot{y} = (3 + e^{-t})x - y \end{cases}$$

Доведемо, що всі розв'язки обмежені. Із системи видно, що

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-t} \\ e^{-t} & 0 \end{pmatrix}.$$

Власними числами матриці A є $\lambda = \pm i\sqrt{5}$, отже $Re(\lambda) = 0$ і A – стійка.

Перевіримо властивість для B:

$$\int\limits_0^t \|B(t)\|dt = \int\limits_0^\infty \sqrt{(e^{-t})^2 + (e^{-t})^2}dt \leq 2\int\limits_0^\infty e^{-t}dt = 2 < \infty.$$

Отже, за теоремою 21 всі розв'язки системи є обмеженими.

Теорема 22 (про асимптотичну стійкість ЛОС з майже сталою матрицею)**.** *Нехай A – асимптотично стійка, $\|B(t)\| \to 0$, $t \to \infty$. Тоді система (43) – асимптотитчно стійка.*

Доведення. Оскільки A – асимптотично стійка, то $\forall\lambda$ – власних чисел матриці A маємо $Re(\lambda) < 0$ і існує $\varepsilon > 0$: $\alpha + 2\varepsilon < 0$, де $\alpha = \max(Re(\lambda))$. Крім того, для $Y(t) = e^{At}$ маємо:

$$\forall t \geq 0 \ \|Y(t)\| \leq c(\varepsilon)e^{(\alpha+\varepsilon)t}.$$

З формули варіації довільної сталої для розв'язку (43) маємо:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int\limits_0^t e^{A(t-s)}B(s)x(s)ds$$

$$\Rightarrow \|x(t)\| \le ce^{(\alpha+\varepsilon)t}\|x_0\| + \int\limits_0^t ce^{(\alpha+\varepsilon)(t-s)}\|B(s)\| \cdot \|x(s)\|ds$$

$$\Rightarrow \|x(t)\|e^{-(\alpha+\varepsilon)t} \le c\|x_0\| + \int\limits_0^t c\|B(s)\| \cdot e^{-(\alpha+\varepsilon)s}\|x(s)\|ds.$$

Застосувавши лему Гронуола, отримаємо:

$$\|x(t)\|e^{-(\alpha+\varepsilon)t} \le c\|x_0\|e^{\int\limits_0^t c\|B(s)\|ds}$$

$$\Rightarrow \|x(t)\| \le c\|x_0\|e^{(\alpha+\varepsilon)t+\int\limits_0^t c\|B(s)\|ds}.$$

За умовою $\|B(t)\| \to 0$, $t \to \infty$, а отже, $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{c\int\limits_0^t \|B(s)\|ds}{t} = 0$, а тому $\exists T > 0$ $\forall t \ge T$ $c\int\limits_0^t \|B(s)\|ds < \varepsilon t$. Отже, $\forall t \ge T$

$$\|x(t)\| \le c\|x_0\|e^{(\alpha+2\varepsilon)t} \to 0,\ t \to \infty.$$

Теорема доведена. □

Зауваження 28. *Якщо A – не стала, то теорема не вірна (тобто, не вірно, що мале збурення залишає систему асимптотично стійкою).*

Приклад 39. *Розглянемо рівняння $\dot{x} = -\frac{1}{t}x$, $t \ge 1$. Його розв'язок $x(t) = \frac{x(1)}{t} \to 0$, $t \to \infty$.*

Розглянемо $\dot{y} = \left(-\frac{1}{t} + \frac{2}{t}\right)y \Rightarrow \dot{y} = \frac{y}{t} \Rightarrow y = ct$ – необмежені при $t \to \infty$, отже маємо нестійкість (відбувся малий приріст несталої матриці, тому це призвело до такого результату).

Приклад 40. *Розглянемо систему* $\begin{cases} \dot{x} = -x + \frac{y}{1+t} \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$. *Потрібно довести, що довільний розв'язок прямує до нуля при $t \to \infty$. Розглянемо матриці системи:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ B(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1+t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Власні числа матриці A: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 < 0$, *тобто матриця* A – *асимптотично стійка. Розглянемо* $\|B(t)\| = \frac{1}{1+t} \to 0$, $t \to \infty$. *Отже, за теоремою 22 система асимптотично стійка, а тому довільний розв'язок прямує до нуля при* $t \to \infty$.

Розглядаємо систему

$$\dot{x} = P(t)x \tag{44}$$

Вважаємо, що виконуються умови Лаппо-Данилевського:

$$\forall t \geq s \geq 0 \; P(t) \cdot \int_s^t P(\tau)d\tau = \int_s^t P(\tau)d\tau \cdot P(t). \tag{45}$$

Зауваження 29. *В якості такої матриці можемо розглянути*

$$P(t) = \begin{pmatrix} p(t) & q(t) \\ q(t) & p(t) \end{pmatrix}$$

Теорема 23. *Нехай для системи* (44) *виконується* (45) *та існує*

$$A = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \cdot \int_0^t P(s)ds.$$

Тоді якщо для всіх λ – *власних чисел матриці* A $Re(\lambda) < 0$, *то* (44) – *асимптотично стійка.*

Доведення. Розглянемо $Y(t) = e^{\int_0^t P(s)ds}$. Доведемо, що $Y(t)$ – фундаментальна матриця системи (44), тобто

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Y(t) = P(t)Y(t) \\ det(Y(t)) \neq 0 \end{cases}$$

Маємо, що

$$Y(0) = E,\; Y(t) = E + \int_0^t P(s)ds + \frac{1}{2!}\left(\int_0^t P(s)ds\right)^2 + \dots$$

В силу (45) отримаємо, що $P(t)Y(t) = Y(t)P(t)$. Тому

$$\frac{d}{dt}Y(t) = e^{\int_0^t P(s)ds} \cdot P(t) = P(t)Y(t),$$

звідки $Y(t)$ – фундаментальна матриця, для довільного розв'язку (44)

$$x(t) = Y(t)x(0).$$

В силу (45) $\forall t \geq s \geq 0$ після диференціювання по s, застосувавши теорему Фубіні, отримаємо

$$P(t)(-P(s)) = -P(s)P(t)$$

$$\Rightarrow \int_0^t P(\tau)d\tau \cdot \frac{1}{s}\int_0^s P(\xi)d\xi = \frac{1}{s}\int_0^s P(\xi)d\xi \cdot \int_0^t P(\tau)d\tau.$$

Спрямувавши $s \to \infty$, будемо мати

$$\int_0^t P(\tau)d\tau \cdot A = A \cdot \int_0^t P(\tau)d\tau.$$

Покладемо

$$\frac{1}{t}\int_0^t P(\tau)d\tau = A + B(t),$$

де $\|B(t)\| \to 0$, $t \to \infty$. Тоді

$$A \cdot B(t) = A\left(\frac{1}{t}\int_0^t P(\tau)d\tau - A\right) = B(t) \cdot A.$$

Отже,

$$x(t) = e^{\int_0^t P(\tau)d\tau} \cdot x(0) = e^{(A+B(t))t} \cdot x(0) = e^{At} \cdot e^{B(t)t} \cdot x(0)$$

Оскільки $\forall \lambda\ Re(\lambda) < 0$, то $\exists \varepsilon > 0 : \alpha + 2\varepsilon < 0$, де $\alpha = \max(Re(\lambda)) < 0$ і

$$\|e^{At}\| \leq c \cdot e^{(\alpha+\varepsilon)t}.$$

Тоді

$$\|x(t)\| \leq ce^{(\alpha+\varepsilon)t}e^{t\|B(t)\|} \cdot \|x(0)\|$$

Отже, $\exists T\ \forall t \geq T$ маємо $\|B(t)\| < \varepsilon$ і

$$\|x(t)\| \leq ce^{(\alpha+\varepsilon)t} \cdot e^{\varepsilon t} \cdot \|x(0)\|$$

$$\leq ce^{(\alpha+2\varepsilon)t} \cdot \|x(0)\| \to 0,\ t \to \infty.$$

Теорема доведена. □

Приклад 41. *Розглянемо систему* $\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{2}x + \sin(t) \cdot x \\ \dot{y} = \sin(t) \cdot x - \frac{1}{2}y \end{cases}$. *Доведемо, що всі розв'язки системи прямують до нуля при* $t \to \infty$.

Матриця $P(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \sin(t) \\ \sin(t) & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *задовольняє умову Ляпунова-Данилевського.*

Розглянемо

$$\frac{1}{t}\int_0^t P(s)ds = \frac{1}{t}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t & 1-\cos(t) \\ 1-\cos(t) & -\frac{1}{2}t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1-\cos(t)}{t} \\ \frac{1-\cos(t)}{t} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = A$$

Власні числа матриці A $\lambda = -\frac{1}{2} < 0$ *кратності 2. Отже, за теоремою 23 система є асимптотично стійкою, тому всі розв'язки прямують до нуля при* $t \to \infty$.

Означення 15. *Системи*

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{46}$$

та

$$\dot{y} = g(t, y) \tag{47}$$

називаються асимптотично еквівалентними, якщо для довільного розв'язку $x(t)$ *системи (46) існує єдиний розв'язок* $y(t)$ *системи (47) такий, що:*

$$\|x(t) - y(t)\| \to 0, \ t \to \infty$$

і навпаки.

Теорема 24 (Левінсона)**.** *Нехай система*

$$\dot{x} = Ax \tag{48}$$

є стійкою, $\int_0^\infty \|B(t)\|dt < \infty$. *Тоді система*

$$\dot{y} = (A + B(t))y \tag{49}$$

асимптотично еквівалентна системі (48).

Зауваження 30. *Система (49) – стійка (з попередніх досліджень).*

В якості застосування розглянемо ЛОР 2-го порядку

$$\ddot{x} + q(t)x = 0 \tag{50}$$

Теорема 25 (про асимптотичне інтегрування ЛОР 2-го порядку)**.** *Нехай виконується умова*

$$\int_0^\infty |1 - q(t)|dt < \infty. \tag{51}$$

Тоді $\forall \alpha, \beta$ *існує єдиний розв'язок* (50) $x = x(t)$*:*

$$x(t) = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t) + o(1),\ t \to \infty$$

$$\dot{x}(t) = -\alpha\sin(t) + \beta\cos(t) + o(1),\ t \to \infty.$$

Доведення. Перейдемо до системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -q(t)x \end{cases} \tag{52}$$

Нехай $q(t) = 1 + \tilde{q}(t)$, де $\int_0^\infty |\tilde{q}(t)|dt < \infty$. З (52) маємо:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \tilde{q}(t)x \end{cases}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\tilde{q}(t) & 0 \end{pmatrix}$$

Оскільки $\lambda(A) = \pm i$, то A – стійка, $\|B(t)\| = |\tilde{q}(t)|$, $\int_0^\infty \|B(t)\|dt = \int_0^\infty |\tilde{q}(t)|dt < \infty$. За теоремою Левінсона система (52) асимптотично еквівалентна системі

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \tag{53}$$

Розв'язок системи (53) має вигляд:

$$x(t) = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$$

$$\dot{x}(t) = -\alpha\sin(t) + \beta\cos(t)$$

В силу теореми Левінсона $\forall \alpha, \beta$ існує єдиний розв'язок (52) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ такий, що

$$|x(t) - \alpha\cos(t) - \beta\sin(t)| \to 0,\ t \to \infty$$

$$|y(t) + \alpha\sin(t) - \beta\cos(t)| \to 0,\ t \to \infty$$

Теорема доведена. □

Приклад 42. *Розглянемо систему* $\begin{cases} \dot{x} = (1 + e^{-t})x - y \\ \dot{y} = 2x - 2(1 + e^{-t^2})y \end{cases}$*. Доведемо, що всі розв'язки обмежені і існує нетривіальний розв'язок, що прямує до нуля при* $t \to \infty$*.*

Маємо $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, *тобто* $Re(\lambda) \leq 0$, *а тому* A – *стійка.*

Далі, $B(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & -2e^{-t^2} \end{pmatrix}$,

$$\int_0^\infty \|B(t)\|dt \leq \int_0^\infty e^{-t}dt + \int_0^\infty 2e^{-t^2}dt < \infty.$$

За теоремою про стійкість ЛОС з майже сталою матрицею маємо: всі розв'язки обмежені. За теоремою Левінсона система еквівалентна системі:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему. Для власного числа $\lambda_1 = 0$ *маємо власний вектор* $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, *а для власного числа* $\lambda_2 = -1$ *маємо власний вектор* $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. *Тому розв'язок буде мати вигляд:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} h_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Покладемо $c_1 = 0, c_2 = 1$, *отримаємо розв'язок*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} \to 0,\ t \to \infty$$

За теоремою Левінсона існує нетривіальний розв'язок вихідної системи такий, що

$$|x(t) - e^{-t}| \to 0,\ t \to \infty$$
$$|y(t) - 2e^{-t}| \to 0,\ t \to \infty$$

Отже, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to 0,\ t \to \infty.$

Література

[1] Капустян О.В. Теорія динамічних систем : навч. посіб. / О. В. Капустян, В.В. Пічкур, В. В. Собчук. – Луцьк : Вежа-друк, 2020. – 348 с. - [Теорія динамічних систем]

[2] Капустян О.В. Стійкість та атрактори еволюційних рівнянь: навч. посіб. / О.В. Капустян, В. В. Пічкур, В. В. Собчук. - 2023. - 380 с.- [Стійкість та атрактори еволюційних рівнянь]

[3] Парасюк І. О. Вступ до якісної теорії диференціальних рівнянь / І. О. Парасюк. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2005. – 88 с. - [Вступ до якісної теорії диференціальних рівнянь]

[4] Парасюк І. О. Динамічні системи: навч. посіб. 2022. – 209 с. Електронне видання. – [Динамічні системи]

[5] Перестюк М. О. Асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь / М. О. Перестюк, О. В. Капустян, П. В. Фекета, Н. В. Касімова . – К. : ВПЦ "Київський університет", 2015. – 138 с. - [Асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь]

[6] Самойленко А. М. Диференціальні рівняння / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк. – К. : Либідь, 2003. – 600 с. - [Диференціальні рівняння]

[7] Самойленко А. М. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, М. О. Перестюк. – К. : Либідь, 2003. – 450 с. - [Диференціальні рівняння у прикладах і задачах]