КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Механіко-математичний факультет

НАВЧАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ОП "КОМП'ЮТЕРНА МАТЕМАТИКА"

Київ – 2026

Навчальні завдання до практичних занять з функціонального аналізу для студентів ОП "Комп'ютерна математика". Укладач: М. Ф. Городній. Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2026. – 41 с.

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. А. В. Чайковський
д-р фіз.-мат. наук, проф. А. Ю. Пилипенко

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету (протокол № 10 від 6 березня 2026 року)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА 4
ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ 5
ЗАНЯТТЯ 1. ОСНОВНІ КЛАСИ МНОЖИН 6
ЗАНЯТТЯ 2. МІРА ЛЕБЕГА НА ПРЯМІЙ ТА НА ПЛОЩИНІ 7
ЗАНЯТТЯ 3. МІРА ЛЕБЕГА НА ПРЯМІЙ ТА НА ПЛОЩИНІ (ПРОДОВЖЕННЯ). МІРА ЛЕБЕГА-СТІЛТЬЄСА 9
ЗАНЯТТЯ 4. ВИМІРНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ. ЕКВІВАЛЕНТНІ ФУНКЦІЇ 10
ЗАНЯТТЯ 5. ЗБІЖНІСТЬ МАЙЖЕ СКРІЗЬ. ЗБІЖНІСТЬ ЗА МІРОЮ . . 12
ЗАНЯТТЯ 6. ОЗНАЧЕННЯ ТА ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА . . . 13
ЗАНЯТТЯ 7. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА-СТІЛТЬЄСА. ГРАНИЧНИЙ ПЕРЕХІД ПІД ЗНАКОМ ІНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА. ІНТЕГРАЛ, ЩО ЗАЛЕЖИТЬ ВІД ПАРАМЕТРА 15
ЗАНЯТТЯ 8. КОНТРОЛЬНА РОБОТА 1 16
ЗАНЯТТЯ 9. ЛІНІЙНІ НОРМОВАНІ ПРОСТОРИ. ЗБІЖНІСТЬ В ЛІНІЙНИХ НОРМОВАНИХ ПРОСТОРАХ 17
ЗАНЯТТЯ 10. ГІЛЬБЕРТОВІ ПРОСТОРИ 19
ЗАНЯТТЯ 11. ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІОНАЛИ 20
ЗАНЯТТЯ 12. ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІОНАЛИ (ПРОДОВЖЕННЯ). ТЕОРЕМА ГАНА-БАНАХА 22
ЗАНЯТТЯ 13. ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ОПЕРАТОРИ 23
ЗАНЯТТЯ 14. ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ОПЕРАТОРИ (ПРОДОВЖЕННЯ). ДОБУТОК ОПЕРАТОРІВ 25
ЗАНЯТТЯ 15. КОНТРОЛЬНА РОБОТА 2 26
ЗАНЯТТЯ 16. ОБОРОТНІСТЬ ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ОПЕРАТОРІВ 27
ЛІТЕРАТУРА 29

ПЕРЕДМОВА

Навчальні завдання охоплюють теми курсу функціонального аналізу, що читаються в VII семестрі студентам ОП "Комп'ютерна математика" відповідно до діючої програми навчальної дисципліни. Для кожного заняття наведено список контрольних питань з теми, що розглядається, і набори задач, для розв'язування в аудиторії (частина А) та домашнього завдання (частина Б).

До частини А кожного заняття включені також додаткові задачі, позначені літерою Д. Вони зазвичай більш складні, доповнюють матеріал відповідного заняття і можуть пропонуватися студентам, які успішно впоралися з основною частиною завдань.

Більшість з наведених тут задач запозичена з відомої навчальної літератури, підготовленої викладачами кафедри математичного аналізу.

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

2^X – набір усіх підмножин X;

$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ – симетрична різниця множин A і B;

$[t]$ – ціла частина t (найбільше ціле число, що не перевищує t);

$C(A)$ – набір усіх функцій, неперервних на множині A;

$\mathcal{B}(Y)$ – борельова σ-алгебра підмножин метричного простору Y;

λ_m - міра Лебега в $\mathbb{R}^m$;

λ_F - міра Лебега-Стілтьєса в $\mathbb{R}^m$, породжена функцією F;

$\mathbf{I}_A(t)$ – індикатор множини A (функція, що дорівнює 1 при $x \in A$ та дорівнює 0 при $x \notin A$);

$f_n \to f \ (mod\, \lambda)$ – послідовність функцій $\{f_n,\ n \geq 1\}$ збігається до функції f майже скрізь за мірою λ;

$f_n \xrightarrow{\lambda} f$ – послідовність функцій $\{f_n,\ n \geq 1\}$ збігається до функції f за мірою λ;

S_m – борельова σ-алгебра підпідмножин $\mathbb{R}^m$;

S_F – σ-алгебра підпідмножин $\mathbb{R}$, вимірних за Лебегом-Стілтьєсом для функції F;

$\mathcal{P} = \{(a, b] \ \mid -\infty < a < b < \infty\} \cup \{\emptyset\}$;

$\mathcal{P}_m = \{(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_m, b_m] \ \mid -\infty < a_k < b_k < \infty,\ 1 \leq k \leq m\} \cup \{\emptyset\}$;

$L(A, \lambda)$ – набір усіх функцій, інтегровних на множині A за мірою λ;

$\mathcal{L}(E_1, E_2)$ – сукупність усіх лінійних неперервних операторів, що діють з лінійного нормованого простору E_1 в лінійний нормований простір E_2;

$\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.

ЗАНЯТТЯ 1
ОСНОВНІ КЛАСИ МНОЖИН

Контрольні запитання

1. Означення півкільця, півалгебри, кільця, алгебри, σ-кільця та σ-алгебри.
2. Означення породжених класів множин.
3. Означення міри.
4. Теорема про елементарні властивості міри, заданої на кільці.
5. Теореми про неперервність міри знизу та зверху.

A1

1. З'ясувати, чи є півкільцем клас $\mathcal{H}$ підмножин $\mathbb{R}$, якщо:
1) $\mathcal{H} = \{[a, b) \ \mid \ -\infty < a < b < \infty\} \cup \{\emptyset\}$;
2) $\mathcal{H} = \{(a, b) \ \mid \ -\infty < a < b < \infty\} \cup \{\emptyset\}$.

2. Нехай $\mathcal{H} = \{B \subset \mathcal{P} \mid$ одна з множин $B, \overline{B}$ не більш ніж зліченна$\}$. Довести, що $\mathcal{H}$ – σ-кільце.

3. Навести приклад кільця, що замкнене відносно операції зліченного перетину, але не є σ-кільцем.

4. Нехай $A \subset X,\ A \neq \emptyset,\ A \neq X$. Визначити мінімальні кільце і σ-алгебру, породжені класом $\mathcal{H} = \{A\}$.

5. Нехай φ – міра на кільці $\mathcal{K}$ підмножин X, A, B, C – такі множини з $\mathcal{K}$, що $\varphi(A \cup B \cup C) < +\infty$. Довести, що:
1) $\varphi(A \cup B \cup C) = \varphi(A) + \varphi(B) + \varphi(C) - \varphi(A \cap B) - \varphi(A \cap C) - \varphi(B \cap C) + \varphi(A \cap B \cap C)$;
2) $\varphi(A \triangle B) \leq \varphi(A \triangle C) + \varphi(C \triangle B)$;
3) $|\varphi(A) - \varphi(B)| \leq \varphi(A \triangle B)$.

Д1. Довести, що непорожній клас $\mathcal{H}$ підмножин X, замкнений відносно операцій $\cup$ і $\triangle$, є кільцем.

Д2. Нехай $\mathcal{F}_Y$ – σ-алгебра підмножин Y, $f : X \to Y$, $f^{-1}(\mathcal{F}_Y) = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{F}_Y\}$. Довести, що $f^{-1}(\mathcal{F}_Y)$ – σ-алгебра підмножин X.

Д3. Нехай $\mathcal{K}_X$ – кільце підмножин X, $f : X \to Y$, $f(\mathcal{K}_X) = \{f(B) \mid B \in \mathcal{K}_X\}$. Показати, що $f(\mathcal{K}_X)$ не є, взагалі кажучи, кільцем підмножин Y.

Д4.Верхньою границею послідовності множин $\{A_n,\ n \geq 1\}$ називають множину $\overline{\lim} A_n = \{x \mid x$ належить до нескінченної кількості множин $A_n\}$. Довести, що $\overline{\lim} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.

Д5. Нехай λ – міра на σ-алгебрі $\mathcal{F}$ підмножин X, $\{A_n,\ n \geq 1\} \subset \mathcal{F}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < +\infty$. Довести, що $\lambda(\overline{\lim}\, A_n) = 0$.

B1

1. Показати, що непорожній клас $\mathcal{H}$ підмножин X, замкнений відносно операцій $\cup$ і $\cap$, не є, взагалі кажучи, кільцем.

2. З'ясувати, чи є півкільцем клас $\mathcal{H}$ підмножин $\mathbb{R}$, якщо:
1) $\mathcal{H} = \{(a, b] \ \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a < b\} \cup \{\emptyset\}$;
2) $\mathcal{H} = \{(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \ \mid -\infty < a_k < b_k < \infty,\ k = 1, 2\} \cup \{\emptyset\}$.

3. Нехай A, B – такі підмножини X, що $A \backslash B,\ B \backslash A,\ A \cap B,\ \overline{A \cup B}$ – непорожні множини. Визначити мінімальні алгебру і σ-алгебру, породжені класом $\mathcal{H} = \{A, B\}$.

4. Нехай $\mathcal{H}$ – непорожній клас множин. Довести, що кожну множину з породженого кільця $k(\mathcal{H})$ можна покрити скінченною кількістю множин з $\mathcal{H}$.

5. Нехай λ – міра на σ-алгебрі $\mathcal{F}$ підмножин X. Довести, що клас множин $\mathcal{K} = \{A \in \mathcal{F} \ |\lambda(A) = 0\}$ є σ-кільцем.

6. Нехай φ – скінченна міра на кільці $\mathcal{K}$ підмножин X, $\{A, B, C\} \subset \mathcal{K}$ та відомі значення $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(C)$, $\varphi(A \cap B)$, $\varphi(A \cap C)$, $\varphi(B \cap C)$, $\varphi(A \cap B \cap C)$. Знайти $\varphi(D)$, якщо D – всіх тих елементів, які:
1) належать тільки до множини A і не належать до B і C;
2) належать тільки до однієї з множин A, B і не належать до C.

ЗАНЯТТЯ 2
МІРА ЛЕБЕГА НА ПРЯМІЙ ТА НА ПЛОЩИНІ

Контрольні запитання

1. Побудова міри Лебега на $\mathbb{R}$.
2. Означення і властивості σ-алгебри $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ борельових множин в $\mathbb{R}$.
3. Побудова міри Лебега на площині.
4. Означення і властивості σ-алгебри $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ борельових множин в $\mathbb{R}^2$.
5. Міра Лебега на площині як добуток мір Лебега на $\mathbb{R}$.

A2

1. Довести, що множина $A \subset \mathbb{R}$ є борельовою, та знайти $\lambda_1(A)$, якщо:
1) $A = [0, 3) \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$;
2) $A = \{1, 2\} \cup (5, +\infty)$;
3) $A = \{x \in \mathbb{R} \ \mid x^2 \in \mathbb{N}\}$.

2. Побудувати множину $A \subset \mathbb{R}^2$, довести, що вона є борельовою, та знайти $\lambda_2(A)$, якщо:
1) $A = \{(x_1, x_2)\}$;
2) $A = \{a\} \times (b, c]$;
3) $A = \{a\} \times \mathbb{R}$;
4) $A = (a, b] \times (c, +\infty)$;
5) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid 0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{x}},\ x \in (0, 1]\}$;
6) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, де $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid 0 \le y \le (x - n)^n,\ x \in [n, n + 1]\},\ n \ge 1$.

3. Нехай множина $A \subset \mathbb{R}$ вимірна за Лебегом і має принаймні одну внутрішню точку. Довести, що $\lambda_1(A) > 0$.

4. Нехай множина $A \subset [a, b]$ вимірна за Лебегом і $\lambda_1(A) = 1$. Довести, що для кожного $\delta \in [0, 1]$ існує множина $A_\delta \subset A$ така, що A_δ вимірна за Лебегом і $\lambda_1(A_\delta) = \delta$.

Д1. Нехай множина $A \subset [a, b]$ замкнена і $\lambda_1(A) = b - a$. Довести, що $A = [a, b]$.

Д2. Нехай множина $A \subset [0, 1]$ вимірна за Лебегом і $\lambda_1(A) > 0$. Довести, що:
1) існують $x, y \in A$ такі, що $(x - y) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$;
2) існують $x, y \in A$ такі, що $(x - y) \in \mathbb{Q}$.

В2

1. Довести, що множина $A \subset \mathbb{R}$ є борельовою, та знайти $\lambda_1(A)$, якщо:
1) $A = [-5, +\infty)\backslash\mathbb{N}$;
2) $A = \{x \in \mathbb{R} \ \mid 0 < arctg\, x < 1\}$;
3) $A = [0, 10]\backslash(\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z})$;
4) $A = \{x \in [0, 1] \ \mid x^4 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}$;
5) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{\ln(n+2)}, \frac{1}{\ln(n+1)}]$.

2. Довести, що множина $A \subset \mathbb{R}^2$ є борельовою, та знайти $\lambda_2(A)$, якщо:
1) $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$;
2) $A = (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$;
3) $A = \mathbb{R} \times \{x \in \mathbb{R} \ \mid x^2 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}$;
4) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, де $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid 0 \le y \le e^{-x},\ x \in [n, n + 1]\},\ n \ge 1$.

3. Нехай A – множина точок $(x, y) \in [0, 1]^2$, таких, що 2^{x+y} – раціональне число. Довести, що множина A є борельовою, та знайти $\lambda_2(A)$.

ЗАНЯТТЯ 3

МІРА ЛЕБЕГА НА ПРЯМІЙ ТА НА ПЛОЩИНІ (ПРОДОВЖЕННЯ). МІРА ЛЕБЕГА-СТІЛТЬЄСА

Контрольні запитання

1. Побудова міри Лебега-Стілтьєса на $\mathbb{R}$.

А3

1. Нехай λ_F – міра Лебега-Стілтьєса, породжена функцією F. Довести, що:
1) $\lambda_F(\{a\}) = F(a) - F(a-)$;
2) $\lambda_F([a,b)) = F(b-) - F(a-)$;
3) $\lambda_F(\mathbb{R}) = F(+\infty) - F(-\infty)$, де $F(\pm\infty) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} F(t)$.

2. Нехай $F(x) = [x]$. Побудувати функцію F. Знайти:
1) $\lambda_F(\{n\})$, де $n \in \mathbb{Z}$;
2) $\lambda_F((0,5)))$;
3) $\lambda_F([0,20] \cap \mathbb{Q})$;
4) $\lambda_F(\mathbb{N})$.

3. Нехай $F(x) = -\mathbf{I}_{(-\infty,0)}(x) + 2\mathbf{I}_{[0,3)}(x) + x\mathbf{I}_{[3,+\infty)}(x),\ x \in \mathbb{R}$. Побудувати функцію F. Знайти $\lambda_F(\{0\})$, $\lambda_F(\{3\})$, $\lambda_F(\mathbb{R}\backslash\{0,3\})$.

4. Нехай для вимірних за Лебегом множин $A_k \subset [0,1],\ 1 \le k \le n$, відомо, що $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k = \emptyset$. Довести, що $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_1(A_k) \le n-1$.

5. Нехай множина $A \subset \mathbb{R}$ вимірна за Лебегом. Довести, що
$\lambda_1(A) = \inf\{\lambda_1(G)\ \mid G$ відкрита в $\mathbb{R},\ A \subset G\}$.

Д1. Довести, що множина $\{x \in \mathbb{R}\ \mid \lambda_F(\{x\}) > 0\}$ не більш ніж зліченна.

Д2. Нехай A – множина всіх чисел з $[0,1]$, в десятковому записі яких немає жодної одиниці. Довести, що множина A є борельовою, та знайти $\lambda_1(A)$.

В3

1. Нехай $F(x) = x^2[x]\mathbf{I}_{[0,+\infty)}(x),\ x \in \mathbb{R}$. Побудувати функцію F. Знайти $\lambda_F(A)$, якщо:
1) $A = [0,3)$;
2) $A = [0,3) \cap \mathbb{Q}$;
3) $A = [0,3)\backslash\mathbb{Q}$;
4) $A = [-3,+\infty)\backslash\mathbb{Q}$.

2. Нехай $F(x) = [x]$. Довести, що $S_F = 2^{\mathbb{R}}$.

3. Побудувати послідовність множин $\{A_n,\ n \geq 1\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, що задовольняє такі умови:
а) $\forall n \geq 1:\ \lambda_1(A_n) = +\infty$;
б) $\forall i \neq j:\ A_i \cap A_j = \emptyset$.

4. Нехай A – вимірна за Лебегом підмножина відрізка $[a, b]$. Довести, що
$\lambda_1(A) = \sup\{\lambda_1(F)\ \mid F$ замкнена в $\mathbb{R},\ F \subset A\}$.
(Вказівка. Застосувати до множини $[a, b]\backslash A$ результат задачі 5).

ЗАНЯТТЯ 4
ВИМІРНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ. ЕКВІВАЛЕНТНІ ФУНКЦІЇ

Контрольні запитання

1. Означення $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$-вимірної, $\mathcal{F}$-вимірної, борельової, вимірної за Лебегом функцій.
2. Теореми про властивості вимірних функцій.
3. Означення еквівалентності функцій.

А4

1. Нехай $A \subset \mathbb{R},\ f(x) = \mathbf{I}_A(x),\ x \in \mathbb{R}$. Довести, що функція f є борельовою тоді і тільки тоді, коли $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. Довести, що функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є борельовою, якщо:
1) $f(x) = \sin[x]$;
2) $f(x) = sign(\cos(x^3))$;
3) $f(x) = x^2 + e^x \mathbf{I}_{[0,5]}(x)$;
4) $f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x < 0, \\ x - 1, & x \geq 0. \end{cases}$

3. Довести, що функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \sin \frac{x^2}{1 + x^2 + y^2} + [y],$$

є борельовою.

4. Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і для кожного $x \in \mathbb{R}$ існує $f'(x)$. Довести, що функція f' є борельовою.

5. Нехай $(X, \mathcal{F})$ – вимірний простір і функції $f, g : X \to \mathbb{R}$ є $\mathcal{F}$-вимірними. Довести, що:
1) $\{x \in X \ \mid f(x) < g(x)\} \in \mathcal{F}$;
2) $\{x \in X \ \mid f(x) = g(x)\} \in \mathcal{F}$.

6. Нехай $f(x) = \sin(\pi x)\, \mathbf{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x),\ x \in \mathbb{R}$. Довести, що:
1) $f(x) = \sin(\pi x)\ (mod\, \lambda_1)$;
2) $f(x) = 0\ (mod\, \lambda_F)$, де $F(x) = [x]$.

7. Нехай $f, g \in C(\mathbb{R})$ і $f = g\ (mod\, \lambda_1)$. Довести, що $f(x) = g(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

8. Нехай $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – простір з повною мірою λ, $f_n : X \to \mathbb{R},\ f_n = 0\ (mod\, \lambda),\ n \geq 1$. Покладемо $g(x) = \sup\limits_{n\geq 1} f_n(x),\ x \in X$. Довести, що $g = 0\ (mod\, \lambda)$.

Д1. Довести, що якщо функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ борельова, то функція $g(x, y) = f(x)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, теж борельова.

Д2. Нехай $(X, \mathcal{F})$ – вимірний простір і $f : X \to \mathbb{R}$. Довести, що:
1) якщо функція f є $\mathcal{F}$-вимірною, то
$\forall a \in \mathbb{R} :\ \{x \in X \ \mid f(x) = a\} \in \mathcal{F}$;
2) обернене до 1) твердження, взагалі кажучи, є хибним.

B4

1. Довести, що функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ є борельовою, якщо:
1) $f(x, y) = sign(\sin(x^3 + y^2))$;
2) $f(x, y) = (x - 2y^2 + 4)[x]$.

2. Нехай $(X, \mathcal{F})$ – вимірний простір і $f_k : X \to \mathbb{R},\ k = 1, 2, 3$ – $\mathcal{F}$ -вимірні функції. Довести $\mathcal{F}$- вимірність таких функцій:

$$1)\ \frac{f_1}{\ln(2 + |f_2|)}; \qquad 2)\ \frac{f_1 + 3f_2 - f_3}{5 + arctg\, f_1}.$$

3. Довести, що функція $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|x|+n},\ x \in \mathbb{R}$, є борельовою.

4. Знайти таку функцію $g \in C(\mathbb{R})$, щоб $f = g\ (mod\, \lambda_1)$, якщо
$$f(x) = \begin{cases} \cos x,\ x \in \mathbb{Q}, \\ arctg\, x,\ x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

5. Знайти таку функцію $g \in C(\mathbb{R}^2)$, щоб $f = g\ (mod\, \lambda_2)$, якщо
$$f(x, y) = \begin{cases} xy,\ (x, y) \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \times \mathbb{Z}, \\ arctg\, x,\ x \notin (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \times \mathbb{Z}. \end{cases}$$

ЗАНЯТТЯ 5
ЗБІЖНІСТЬ МАЙЖЕ СКРІЗЬ. ЗБІЖНІСТЬ ЗА МІРОЮ

Контрольні запитання

1. Означення збіжності майже скрізь.

2. Означення збіжності за мірою.

3. Теорема Лебега та теорема Рісса про зв'язок збіжностей майже скрізь і за мірою.

A5

1. Дослідити послідовність $\{f_n,\ n \geq 1\}$ на збіжність майже скрізь $(mod\,\lambda_1)$ та збіжність за мірою λ_1, якщо:
1) $f_n(x) = \mathbf{I}_{[n,n+1]}(x),\ x \in \mathbb{R}$;
2) $f_n(x) = \frac{x}{n^2}\mathbf{I}_{[0,n]}(x),\ x \in \mathbb{R}$;
3) $f_n(x) = x^2 + \mathbf{I}_{[-n,+\infty)}(x),\ x \in \mathbb{R}$;
4) $f_n(x) = \sin^{2n} x,\ x \in \mathbb{R}$.

2. Нехай $F(x) = [x],\ x \in \mathbb{R}$. Довести, що для довільних функцій $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ n \geq 1$, виконується таке твердження:
$f_n \to f\ (mod\,\lambda_F) \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}:\ f_n(k) \to f(k),\ n \to \infty$.

3. Нехай $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – простір з мірою, $f, f_n : X \to \mathbb{R},\ n \geq 1$, і $f_n \xrightarrow{\lambda} f$. Довести, що:
1) $|f_n| \xrightarrow{\lambda} |f|$;
2) $\cos f_n \xrightarrow{\lambda} \cos f$.

4. Нехай $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – простір з мірою, $f, g, f_n : X \to \mathbb{R},\ n \geq 1$, – такі функції, що $f_n \xrightarrow{\lambda} f$, функція g є $\mathcal{F}$-вимірною і $|f_n| \leq g\ (mod\,\lambda)$ на X для кожного $n \geq 1$. Довести, що $|f| \leq g\ (mod\,\lambda)$ на X.

Д1. Нехай $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – простір з мірою, $\lambda(X) < +\infty$ і $f, f_n : X \to \mathbb{R},\ n \geq 1$, – $\mathcal{F}$-вимірні функції. Довести, що $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ тоді і тільки тоді, коли з довільної підпослідовності послідовності $\{f_n,\ n \geq 1\}$ можна виділити підпослідовність, що збігається до f майже скрізь $(mod\,\lambda)$ на X.

Д2. Нехай Нехай $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – простір з мірою і $f_n : X \to \mathbb{R},\ n \geq 1$, – такі функції, що $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$ і $0 \leq f_{n+1} \leq f_n\ (mod\,\lambda)$ на X для кожного $n \geq 1$. Довести, що $f_n \to f\ (mod\,\lambda)$.

Д3. Навести приклад борельових функцій $f, g, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ n \geq 1$, таких, що $f_n \xrightarrow{\lambda_1} f$, але послідовність $\{gf_n,\ n \geq 1\}$ не збігається за мірою λ_1 до функції gf.

Д4.Нехай $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – простір з мірою і $f, f_n : X \to \mathbb{R},\ n \geq 1,$ – $\mathcal{F}$-вимірні функції. Довести, що
$f_n \to f\ (mod\,\lambda) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 :\ \lim\limits_{n\to\infty} (\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} \{x \in X\ \ |\ |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$

B5

1. Дослідити послідовність $\{f_n,\ n \geq 1\}$ на збіжність майже скрізь $(mod\,\lambda_1)$ та збіжність за мірою λ_1, якщо:
1) $f_n(x) = 2x + \mathbf{I}_{[\sqrt{n},\sqrt{n+1}]}(x),\ x \in \mathbb{R}$;
2) $f_n(x) = e^x + x\mathbf{I}_{[-n,0]}(x),\ x \in \mathbb{R}$.

2. Нехай $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – простір з мірою і $f, g, f_n, g_n : X \to \mathbb{R},\ n \geq 1,$ – такі функції, що $f_n \xrightarrow{\lambda} f,\ g_n \xrightarrow{\lambda} g$, а також $f_n + g_n > 1\ (mod\,\lambda)$ для кожного $n \geq 1$. Довести, що $f + g \geq 1\ (mod\,\lambda)$.

3. Знайти таку функцію $f \in C(\mathbb{R})$, щоб $f_n \to f\ (mod\,\lambda_1)$, якщо $f_n(x) = x^2 \sin^n(x^2)$.

4. Нехай Нехай $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – простір з мірою і $f_n : X \to \mathbb{R},\ n \geq 1,$ – такі функції, що $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$. Довести, що $f_n^2 \xrightarrow{\lambda} 0$.

ЗАНЯТТЯ 6
ОЗНАЧЕННЯ ТА ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА

Контрольні запитання

1. Означення інтеграла Лебега (від невід'ємної простої вимірної функції; від невід'ємної вимірної функції; у загальному випадку).
2. Означення інтегровної за Лебегом функції.
3. Властивості інтеграла Лебега.
4. Теорема про σ-адитивність інтеграла Лебега.
5. Зв'язок між інтегралами Лебега і Рімана.
6. Критерій Лебега інтегровності функції за Ріманом.

A6

У наступних задачах $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – простір з мірою, λ_1 – міра Лебега на $\mathbb{R}$ і λ_2 – міра Лебега на $\mathbb{R}^2$.

1. Обчислити:
1) $\int\limits_{[0,20)} \mathbf{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x) d\lambda_1(x)$; 2) $\int\limits_{[0,100]} \frac{1}{[x+1]\cdot[x+2]} d\lambda_1(x)$.

2. Нехай $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(n, n+n^{-\alpha}]$. При яких $\alpha \in \mathbb{R}$ функція $\mathbf{I}_A(x),\ x \in \mathbb{R}$, належить $L(\mathbb{R}, \lambda_1)$?

3. Обчислити $\int\limits_A (-1)^{[x^2+y^2]} d\lambda_2(x,y)$, якщо $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid x^2+y^2 < 3\}$.

4. Обчислити $\int\limits_{[0,+\infty)} \frac{d\lambda_1(x)}{[x]!}$.

5. Нехай $F(x) = 2\mathbf{I}_{[1,2)}(x) + 3\mathbf{I}_{[2,+\infty)}(x),\ x \in \mathbb{R}$. Обчислити $\int\limits_{\mathbb{R}} x^2 d\lambda_F(x)$.

6. Обчислити $\int\limits_{[0,1]} \cos x \mathbf{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x) d\lambda_1(x)$. Чи є підінтегральна функція інтегровною за Ріманом на відрізку $[0,1]$?

7. Нехай $f(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha},\ x \geq 1$. При яких $\alpha \in \mathbb{R}$ невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ збігається абсолютно? При яких $\alpha \in \mathbb{R}$ функція f належить $L([1,+\infty), \lambda_1)$?

Д1. Нехай $\lambda(X) < +\infty$ і $f : X \to \mathbb{R}$ – $\mathcal{F}$-вимірна функція. Довести, що $f \in L(X,\lambda) \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\lambda(\{x \in X \ \mid k \leq |f(x)| \leq k+1\}) < +\infty$.

Д2. Нехай множина $A \subset \mathbb{R}$ обмежена і вимірна за Лебегом, $f : A \to \mathbb{R}$ – рівномірно неперервна на A функція. Довести, що $f \in L(X, \lambda_1)$.

Д3. Нехай A – замкнена підмножина відрізка $[a,b]$ і $\lambda_1(A) = 0$. Довести, що функція $\mathbf{I}_A$ є інтегровною за Ріманом на $[a,b]$.

В6

1. Нехай $\{A, B\} \subset \mathcal{F},\ \lambda(A \cup B) < +\infty$ і відомі міри множин $A, B, A \cap B$. Обчислити :

1) $\int\limits_X |\mathbf{I}_A - \mathbf{I}_B| d\lambda$; 2) $\int\limits_X |\mathbf{I}_A - 2\mathbf{I}_A\mathbf{I}_B| d\lambda$.

2. Обчислити $\int\limits_{\mathbb{R}} f d\lambda_1$, якщо $f = \sin(2\mathbf{I}_A),\ A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [n, n+3^{-n})$.

3. Обчислити $\int\limits_{\mathbb{R}^2} f d\lambda_2$, якщо $f = \mathbf{I}_A(2+\mathbf{I}_A),\ A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} (n, n+2^{-n}) \times (m, m+2^{-m})$.

4. Обчислити $\int\limits_{[0,+\infty)} \frac{d\lambda_1(x)}{[2x+1]\cdot[2x+3]}$.

5. Довести нерівності $\frac{1}{3e} \leq \int\limits_{[0,1)} x^2 e^{-x^2}(1 - \mathbf{I}_{\mathbb{Q}}(x)) d\lambda_1(x) \leq \frac{1}{3}$.

6. Довести, що $f \in L([0,1], \lambda_1)$, і обчислити $\int\limits_{[0,1]} f d\lambda_1$, якщо:

1) $f(x) = e^{10x}\mathbf{I}_{\mathbb{Q}}(x)$; 2) $f(x) = \begin{cases} x^{10}, \ x \in \mathbb{Q}, \\ (1+x^2)^{-1}, \ x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$

ЗАНЯТТЯ 7

ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА-СТІЛТЬЄСА. ГРАНИЧНИЙ ПЕРЕХІД ПІД ЗНАКОМ ІНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА. ІНТЕГРАЛ, ЩО ЗАЛЕЖИТЬ ВІД ПАРАМЕТРА

Контрольні запитання

1. *Теорема про обчислення інтеграла Лебега-Стілтьєса.*
2. *Теорема про інтегрування невід'ємної монотонної послідовності функцій.*
3. *Теорема Лебега про мажоровну збіжність.*
4. *Теорема про неперервність інтеграла Лебега за параметром.*

А7

1. Обчислити $\int\limits_{[-2,5]} x^2 d\lambda_F(x)$, якщо $F(x) = \begin{cases} [x], \ x < 1, \\ x^3, \ x \geq 1. \end{cases}$

2. Знайти границі:
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,100]} \frac{x^{40}\sin^n x}{1+x^{40}} d\lambda_1(x)$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,100]} \cos^{2n}(\pi x) d\lambda_1(x)$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,100]} \cos^{2n}(\pi x) d\lambda_F(x)$, якщо $F(x) = [x]$.

3. Нехай $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – простір з мірою, $\lambda(X) < +\infty$ і $f, f_n : X \to \mathbb{R}, \ n \geq 1$, – такі $\mathcal{F}$-вимірні функції що $f_n \to f \ (mod\, \lambda)$. Довести, що
$\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X arctg\, f_n(x) d\lambda(x) = \int\limits_X arctg\, f(x) d\lambda(x)$.

4. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{(-\infty,0]} e^x \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} d\lambda_1(x)$.

5. Знайти $\lim\limits_{t\to 0} \int\limits_{[0,1]} \frac{\mathbf{I}_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}(x)}{\sqrt{x}+|\sin(tx)|} d\lambda_1(x)$.

6. Нехай $h(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-t(x^2+y^2)}([x]+[y]) d\lambda_2(x,y), \ t > 0$. Довести, що $h \in C((0,+\infty))$.

Д1. Побудувати послідовність $\{f_n,\ n \geq 1\} \subset L([0,1],\lambda_1)$ обмежених функцій, яка збігається поточково до неінтегровної відносно міри λ_1 на відрізку $[0,1]$ функції.

Д2. Довести, що твердження теореми Лебега про мажоровну збіжність залишиться правильним, якщо збіжність майже скрізь замінити на збіжність за мірою.

Д3. Нехай $(X,\mathcal{F},\lambda)$ – простір з мірою, $\lambda(X) < +\infty$ і $f, f_n : X \to \mathbb{R},\ n \geq 1,$ – $\mathcal{F}$-вимірні функції. Довести, що
$f_n \xrightarrow{\lambda} f \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X \frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|} d\lambda(x) = 0.$

B7

1. Обчислити $\int\limits_A f d\lambda_F(x)$, якщо:
1) $f(x) = x, \quad F(x) = e^x + [x], \quad A = [0,10];$
2) $f(x) = x^2, \quad F(x) = (1-e^{-x})\mathbf{I}_{[0,+\infty)}(x), \quad A = [0,1].$

2. Знайти границі:
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,+\infty)} n(e^{-\frac{x}{n}} - 1)\frac{1}{1+x^4} d\lambda_1(x);$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{(0,+\infty)} e^{-x}(1+\sin^n(\frac{1}{x})) d\lambda_1(x).$

3. Нехай $f, f_n : X \to \mathbb{R},\ n \geq 1,$ – функції, вимірні за Лебегом і $f_n \to f\ (mod\,\lambda_1)$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,+\infty)} e^{-x-f_n^2(x)} d\lambda_1(x).$

4. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n d\lambda_F$, якщо
$F(x) = \mathbf{I}_{[0,1]}(x) + 2\mathbf{I}_{[1,+\infty)}(x),\ f_n(x) = \sqrt[n]{|x|}.$

5. Довести, що $g \in C(\mathbb{R})$, якщо $g(t) = \int\limits_{[0,+\infty)} \frac{[x]^2}{1+x^4} \sin(t\cos^2 x) d\lambda_1(x),\ x \in \mathbb{R}.$

ЗАНЯТТЯ 8
КОНТРОЛЬНА РОБОТА 1

Тематика задач

1. Довести, що множина $A \subset \mathbb{R}^2$ є борельовою, та знайти $\lambda_2(A)$.

2. Дослідити послідовність $\{f_n,\ n \geq 1\}$ на збіжність майже скрізь $(mod\,\lambda_1)$ та збіжність за мірою λ_1.

3. Обчислити $\int\limits_{[a,b]} f d\lambda_1(x)$ та $\int\limits_{[a,b]} f d\lambda_F(x)$.

4. Знайти границю, використовуючи теореми про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега.

ЗАНЯТТЯ 9

ЛІНІЙНІ НОРМОВАНІ ПРОСТОРИ. ЗБІЖНІСТЬ В ЛІНІЙНИХ НОРМОВАНИХ ПРОСТОРАХ

Контрольні запитання

1. Означення лінійного нормованого простору (ЛНП), банахового простору.
2. Означення норм у просторах $C([a,b])$; $L_p(X,\lambda)$, $1 \le p < \infty$; l_p, $1 \le p \le \infty$.
3. Означення лінійної оболонки (Л.О.), замкненої лінійної оболонки (З.Л.О.), тотальної множини.
4. Означення підпростору в ЛНП.

A9

1. З'ясувати, чи є нормою в $C([0,2])$ функція $\varphi(x) = \max\limits_{t\in[1,2]} |x(t)|,\ x \in C([0,2])$.

2. Дослідити на збіжність в $C([0,1])$ послідовність $\{x_n,\ n \ge 1\}$, якщо:
1) $x_n(t) = e^{-nt}$; 2) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$.

3. Дослідити на збіжність в E послідовність $\{x^{(n)},\ n \ge 1\}$, якщо:

$$1)\ E = l_1,\quad x^{(n)} = (1, 0, ..., 0, \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{n+1}, 0, 0, ...);$$

$$2)\ E = l_{\frac{3}{2}},\quad x^{(n)} = (0, 0, ..., 0, \underbrace{\frac{1}{n}}_{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, ...).$$

4. Дослідити на збіжність в $L_2(\mathbb{R},\lambda_1)$ послідовність $\{x_n,\ n \ge 1\}$, якщо
$x_n(t) = (\sqrt{n} - n\sqrt{n}\,t)\mathbf{I}_{[0,\frac{1}{n}]}(t)$.

5. Довести, що:
1) система функцій $\{1,\ t,\ t^2, \dots\}$ тотальна в $C([a,b])$ та $L_p([a,b],\lambda_1)$, $1 \le p < \infty$;
2) система функцій $\{t^{2k},\ k \ge 0\}$ тотальна в $C([0,1])$ та $L_p([0,1],\lambda_1)$, $1 \le p < \infty$.

6. Нехай $c_0 = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in l_\infty \ \mid \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$. Довести, що c_0 – підпростір в l_∞.

Д1. Знайти необхідну і достатню умову на послідовність $\{\alpha_n,\ n \geq 1\} \subset [0, +\infty)$, щоб функція $\varphi(x) = \Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k |x_k|^2\Big)^{1/2},\ x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$, була нормою на l_2.

Д2. Довести щільність в $L_p(X, \lambda),\ 1 \leq p < \infty$, множини $A = \{x \in C([a, b])\ \mid x(a) = x(b) = 0\}$.

Д3. Нехай $C_b(\mathbb{R})$ – лінійний простір всіх неперервних і обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з поточковим додаванням і множенням на дійсне число. Довести, що:
1) функція $\|x\| = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|,\ x \in C_b(\mathbb{R})$, є нормою в $C_b(\mathbb{R})$;
2) $(C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ – банахів простір;
3) простір $(C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ несепарабельний.

В9

1. З'ясувати, чи є нормою в $C([0, 2])$ функція $\varphi(x) = \max\limits_{t \in [0,1]} |x(t)| + \int\limits_1^2 |x(t)| dt$, $x \in C([0, 2])$.

2. Дослідити на збіжність в $C([0, 1])$ послідовність $\{x_n,\ n \geq 1\}$, якщо:
1) $x_n(t) = t^n - t^{3n}$; 2) $x_n(t) = n \ln(1 + \frac{t}{n})$.

3. Дослідити на збіжність в $L_3([0, 1], \lambda_1)$ послідовність $\{x_n,\ n \geq 1\}$, якщо $x_n(t) = n \ln(1 + \frac{t}{n})$.

4. Дослідити на збіжність в E послідовність $\{x^{(n)},\ n \geq 1\}$, якщо:

1) $E = l_p,\ 1 \leq p \leq \infty,\ x^{(n)} = \Big(1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, ..., \dfrac{1}{\sqrt{n}},\ 0, 0, ...\Big)$;

2) $E = l_p,\ 2 < p \leq \infty,\ \ x^{(n)} = \Big(0, 0, ..., 0, \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}}_{n+1}, \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}, \dfrac{1}{\sqrt{n+3}}, ...\Big)$.

5. Довести, що система елементів

$$\{e_n = \big(0, 0, ..., 0, \underbrace{1}_{n}, 0, 0, ...\big),\ n \geq 1\}$$

тотальна в l_p для кожного $1 \leq p < \infty$.

6. З'ясувати, чи є підпросторами в $C([-1, 1])$ такі множини:
1) множина всіх многочленів;
2) множина всіх неперервно диференційовних функцій;
3) множина всіх парних функцій.

ЗАНЯТТЯ 10
ГІЛЬБЕРТОВІ ПРОСТОРИ

Контрольні запитання

1. Означення скалярного добутку; його властивості.

2. Означення гільбертового простору.

3. Ортогональне доповнення множини в гільбертовому просторі. Теорема про проекцію на підпростір. Наслідки.

4. Означення ортогональної, ортонормованої, повної системи, ортонормованого базису.

А10

1. Нехай $\{x_n,\ n \geq 1\}$, $\{y_n,\ n \geq 1\}$ – такі послідовності в гільбертовому просторі H, що $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ для всіх $n \geq 1$, а також $(x_n, y_n) \to 1,\ n \to \infty$. Довести, що $\|x_n - y_n\| \to 0,\ n \to \infty$.

2. Довести, що норма в $C([0,1])$ не породжується скалярним добутком.

3. Нехай M, N – такі підпростори в гільбертовому просторі H, що $M \perp N$ і $\forall x \in H\ \exists x' \in M\ \exists x'' \in N:\ x = x' + x''$.
Довести, що:
1) вказане зображення $x = x' + x''$ єдине;
2) $M^{\perp} = N$.

4. Знайти $M^{\perp}$, якщо:
1) $H = l_2,\ M = \{(1,0,0,0,\dots),\ (0,1,0,0,\dots)\}$;
2) $H = L_2([-\pi,\pi],\lambda_1),\ M = \text{Л.О.}\{e^{int},\ n \geq 0\}$;
3)$H = L_2([-1,1],\lambda_1),\ M$ – множина всіх парних функцій з H.

5. Для функції $y(t) = e^t,\ t \in [-1,1]$, знайти такий многочлен $p_*(t)$ другого степеня, що в просторі $L_2([-1,1],\lambda_1)$ $\|y - p_*\|_2$ є мінімальною серед норм $\|y - p\|_2$, де $p(t)$ – довільний многочлен степеня, не більшого за два.

Д1. Нехай $H = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\ \mid$ множина $\{x \in \mathbb{R}\ \mid f(x) \neq 0\}$ не більш ніж зліченна і $\sum\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|^2 < +\infty\}$. Довести, що H – несепарабельний гільбертів простір зі скалярним добутком $(f,g) = \sum\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}$.

Д2. Нехай $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ – вимірна за Лебегом функція, така, що $g > 0\ (mod\,\lambda_1)$ на $[a,b]$, $L_{2,g} = \{x : [a,b] \to \mathbb{C}\ \mid x\sqrt{g} \in L_2([a,b],\lambda_1)\}$. Довести, що:
1) $L_{2,g}$ є гільбертовим простором зі скалярним добутком $(x,y) = \int\limits_{[a,b]} x(t)\overline{y(t)}g(t)d\lambda_1(t)$;

2) $L_{2,g} \subset L_2([a,b],\lambda_1)$ тоді і тільки тоді, коли існує таке $\varepsilon > 0$, що $g > \varepsilon \ (mod\, \lambda_1)$ на $[a,b]$.

B10

1. Довести, що норма в l_1 не породжується скалярним добутком.

2. Знайти $M^{\perp}$, якщо:
1) $H = L_2([0,1],\lambda_1)$, M – множина всіх многочленів, що розглядаються на $[0,1]$;
2) $H = L_2([0,1],\lambda_1)$, $\quad M = \{t^{2k},\ k \geq 0\}$;
3) $H = L_2([-1,1],\lambda_1)$, $\quad M = \{t^{k},\ k \geq 13\}$.

3. У гільбертовому просторі $L_2([0,1],\lambda_1)$ знайти відстань від елемента $y(t) = t^3$ до підпростору $N = \text{Л.О.}\{1, t, t^2\}$.

ЗАНЯТТЯ 11
ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІОНАЛИ

Контрольні запитання

1. Означення лінійного функціонала, неперервного функціонала, обмеженого функціонала; їхні властивості.

2. Означення норми лінійного неперервного функціонала(ЛНФ).

3. Теореми про загальний вигляд ЛНФ у гільбертовому просторі, просторах $L_p(X,\lambda)$, $\quad l_p$, $\quad 1 \leq p < \infty$.

A11

1. З'ясувати, чи є функціонал $f : C([0,1]) \to \mathbb{C}$, $f(x) = 5\|x\|$,
1) лінійним;
2) неперервним;
3) обмеженим.

2. Довести лінійність і неперервність та знайти норми функціоналів:

$$1)\ f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{1}{k}\Big)x_k,\ x = (x_1, x_2, \dots) \in l_1;$$

$$2)\ f(x) = (3+4i)x_2 - x_4,\ x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2;$$

$$3)\ f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_{2k}}{k},\ x = (x_1, x_2, \dots) \in l_3;$$

$$4)\ f(x) = \int\limits_{[0,1]} t^{-1/3} x(t) d\lambda_1(t),\ x \in L_2([0,3], \lambda_1);$$

$$5)\ f(x) = \int\limits_0^1 t x(t) dt,\ x \in C([0,1]);$$

$$6)\ f(x) = x(0) - 2x(1),\ x \in C([-1,1]).$$

Д1. Довести що лінійний функціонал f є неперервним в гільбертовому просторі H тоді і тільки тоді, коли його ядро $Ker\, f = \{x \in H \mid f(x) = \bar{0}\}$ є замкненою множиною в H.

Д2. Лінійний функціонал $f : C([a,b]) \to \mathbb{R}$, визначений на дійсному просторі $C([a,b])$, називають невід'ємним, якщо
$\forall\, x \in C([a,b]),\ x(t) \geq 0,\ t \in [a,b] :\ f(x) \geq 0.$
Довести, що невід'ємний функціонал F є неперервним, а також $\|f\| = f(x_0)$, де $x_0(t) = 1,\ t \in [a,b]$.

B11

1. Довести лінійність і неперервність та знайти норми функціоналів:

$$1)\ f(x) = \int\limits_0^1 x(t) \sin(\pi t) dt,\ x \in C([0,1]);$$

$$2)\ f(x) = (1+i)x_1 - i x_3,\ x = (x_1, x_2, \dots) \in l_{4/3};$$

$$3)\ f(x) = \int\limits_{[1,+\infty)} e^{-t} x(t) d\lambda_1(t),\ x \in L_3([0,+\infty), \lambda_1);$$

$$4)\ f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{\sqrt{k}} x_k,\ x = (x_1, x_2, \dots) \in l_{5/4};$$

$$5)\ f(x) = \int\limits_{[0,1]} x(t) d\lambda_1(t) - \int\limits_{[2,3]} x(t) d\lambda_1(t),\ x \in L_2([0,3], \lambda_1)).$$

2. З'ясувати, для яких $\alpha \in \mathbb{R}$ наведені функціонали є лінійними і неперервними:

$$1)\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n x_n,\ x = (x_1, x_2, \dots) \in l_1;$$

$$2) f(x) = \int\limits_{[0,1]} \frac{x(t)}{t^\alpha}\, d\lambda_1(t),\ x \in L_2([0,1], \lambda_1)).$$

ЗАНЯТТЯ 12
ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІОНАЛИ (ПРОДОВЖЕННЯ). ТЕОРЕМА ГАНА-БАНАХА

Контрольні запитання

1. Теорема Гана-Банаха. Її наслідки.

A12

1. Довести, що наведені функціонали є лінійними і неперервними:

$$1)\ f(x) = \int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt,\ x \in C([-1,1]);$$

$$2)\ f(x) = \int\limits_{0}^{\pi} x(t)\cos t dt,\ x \in C([0,\pi]).$$

2. Нехай G – підпростір гільбертового простору H і $f \in G'$. Описати всі лінійні неперервні продовження F функціонала f на H. Які з них зберігають норму?

3. Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ – лінійно незалежні елементи банахового простору E. Довести, що існують такі функціонали $f_1, f_2, \dots, f_n \in E'$, що $f_k(x_j) = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$

Д1. Довести, що $(l_1)' = l_\infty$.

Д2. Довести, що $(c_0)' = l_1$, тобто
$\forall f \in (c_0)'\ \ \exists!\, y = (y_1, y_2, \dots) \in l_1 :\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n,\ x = (x_1, x_2, \dots) \in c_0,$
а також $\|f\| = \|y\|_1$.

B12

1. Довести, що функціонал
$f(x) = x(0) - 5x(1) + \int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt,\ x \in C([-1,1]),$
є лінійним і неперервним.

2. Довести, що функціонал
$f(x) = \int\limits_0^2 (1-t^2)x(t)dt,\ x \in C([0,2])$,
є лінійним і неперервним. Знайти $\|f\|$.

3. Нехай $G = \{x \in C([0,1]) \ \mid x(0) = 0\}$. Побудувати лінійний неперервний функціонал f на $C([0,1])$, який дорівнює нулю на G і набуває значення 2 на функції $x(t) = t+1,\ t \in [0,1]$.

4. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – лінійно незалежні елементи банахового простору E і $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – фіксовані числа. Довести, що існує такий функціонал $f \in E'$, що $f(x_k) = c_k,\ 1 \le k \le n$.

ЗАНЯТТЯ 13
ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ОПЕРАТОРИ

Контрольні запитання

1. Означення лінійного оператора, неперервного оператора, обмеженого оператора; їхні властивості.
2. Означення норми лінійного неперервного оператора (ЛНО).

А13

1. З'ясувати, чи є оператор $A : C([0,1]) \to C([0,1])$, $Ax(t) = \sin x(t)$,
1) лінійним;
2) неперервним;
3) обмеженим.

2. Довести, що оператор $A : E \to E$ є лінійним і неперервним та знайти $\|A\|$, якщо:

1) $E = l_2, \quad Ax = (0, \frac{x_2}{2}, 0, \frac{x_4}{4}, \ldots, 0, \frac{x_{2k}}{2k}, \ldots)$;

2) $E = C([0,1]), \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 e^{t-2s} x(s)ds$;

3) $E = l_1, \quad Ax = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots, \underbrace{x_n - x_{n+1}}_{n}, \ldots)$;

4) $L_2([-\pi,\pi], \lambda_1)$ $(Ax)(t) = \int\limits_{[-\pi,\pi]} \cos t \cdot x(s) d\lambda_1(s)$.

3. Нехай $E_1 = C([0,1])$, $E_2 = l_\infty$ і оператор $A : E_1 \to E_2$ визначається за правилом

$$Ax = (x(0), 0, 2x(1), 0, 0, 0, 0, \dots), \quad x \in E_1.$$

Довести, що $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ та знайти $\|A\|$.

Д1. Нехай $E_1 = C^{(1)}([0,1])$ з нормою $\|x\|_1 = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |x'(t)|$, $E_2 = C([0,1])$ і $A : E_1 \to E_2$ – оператор вкладення, тобто $Ax = x$, $x \in E_1$. Довести: а) $(E_1, \|\cdot\|_1)$ – банахів простір; б) оператор A є лінійним і неперервним. Знайти $\|A\|$.

Д2. Навести приклад лінійного неперервного оператора, в якого незамкнена множина значень.

Д3. Нехай $\varphi \in L(\mathbb{R}, \lambda_1)$. Довести, що оператор $A : L_1(\mathbb{R}, \lambda_1) \to L_1(\mathbb{R}, \lambda_1)$, який визначається формулою $(Ax)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t-s)x(s)d\lambda_1(s)$, коректно визначений і є лінійним і неперервним.

B13

1. Довести, що оператор $A : E \to E$ є лінійним і неперервним та знайти $\|A\|$, якщо:

1) $E = l_2, \quad Ax = (x_3, x_4, x_5, \dots)$;

2) $E = C([0,2]), \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 tx(s)ds$;

3) $E = C([-1,1]), \quad Ax(t) = (e^t - 1)x(t)$;

4) $E = L_2([-\pi,\pi], \lambda_1)$ $(Ax)(t) = \int\limits_{[-\pi,\pi]} e^{it}x(s)d\lambda_1(s)$.

2. З'ясувати, чи є оператор $A : C([0,1]) \to C([0,1])$, $(Ax)(t) = x^2(t)$,
1) лінійним;
2)* неперервним.

3. Нехай оператор $A : \mathbb{C}^2 \to l_2$ визначається за правилом

$$Ax = (x_1, x_2, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_1}{3}, \frac{x_2}{3}, \dots), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2,$$

і в $\mathbb{C}^2$ розглядається евклідова норма $\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$. Довести, що оператор A є лінійним і неперервним та знайти $\|A\|$.

ЗАНЯТТЯ 14
ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ОПЕРАТОРИ (ПРОДОВЖЕННЯ). ДОБУТОК ОПЕРАТОРІВ

Контрольні запитання

1. Теорема про обчислення норми одновимірного оператора.
2. Означення добутку лінійних неперервних операторів.

A14

1. Довести, що оператор $A : E \to E$ є лінійним і неперервним та знайти $\|A\|$, якщо:

$$1)\ E = C([0,1]), \quad (Ax)(t) = \int\limits_0^1 t^2 s x(s) ds;$$

$$2)\ E = L_3([0,1], \lambda_1), \quad (Ax)(t) = \int\limits_{[0,1]} t^2 s x(s) d\lambda_1(s);$$

$$3)\ E = L_2([-\pi,\pi], \lambda_1), \quad (Ax)(t) = \int\limits_{[-\pi,\pi]} \sin(t+s) x(s) d\lambda_1(s).$$

2. Нехай A, B – такі оператори з $\mathcal{L}(l_2)$, що

$$Ax = (0, x_1, x_2, x_3, \dots), \quad Bx = (, x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Знайти AB і BA.

3. Довести, що оператори $A, B : C([0,1]) \to C([0,1]), \quad (Ax)(t) = tx(t)$, $(Bx)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$ є лінійними, неперервними і не комутують.

4. Нехай $\left(\alpha_{jk}\right)_{j,k=1}^{\infty}$ – така числова матриця, що $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_{jk}|^2 < +\infty$. Довести, що оператор $A : l_2 \to l_2$,

$$Ax = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{1k} x_k,\ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k} x_k, \dots,\ \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{jk} x_k}_{j}, \dots\Big), \quad x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2,$$

є лінійним і неперервним.

Д1. Нехай $\{y_k,\ 1 \le k \le n\}$, $\{z_k,\ 1 \le k \le n\}$ – ортонормовані системи елементів в гільбертовому просторі H і $\{c_k,\ 1 \le k \le n\} \subset \mathbb{C}$. Довести, що оператор $A : H \to H$,

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} c_k (x, y_k) z_k, \quad x \in H,$$

є лінійним і неперервним, а також $\|A\| = \max\limits_{1 \le k \le n} |c_k|$.

Д2. Довести, що простір $\mathcal{L}(l_2)$ несепарабельний.

В14

1. Довести, що оператор $A : E \to E$ є лінійним і неперервним та знайти $\|A\|$, якщо:

1) $E = C([0,2]), \quad (Ax)(t) = t^2(x(2) - 2x(0))$;

2) $L_2([0,1], \lambda_1), \quad (Ax)(t) = \int\limits_{[0,1]} \dfrac{x(s) d\lambda_1(s)}{\sqrt[3]{ts}}$;

3) $L_2([-\pi, \pi], \lambda_1), \quad (Ax)(t) = \int\limits_{[-\pi,\pi]} \cos(t + 2s) x(s) d\lambda_1(s)$.

2. Нехай $E_1 = \{x \in C^{(1)}([0,1]) \ \mid x(0) = 0\}$, $\|x\|_1 = \max\limits_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max\limits_{t \in [0,1]} |x'(t)|$, $E_2 = C([0,1])$, $A : E_1 \to E_2$, $(Ax)(t) = x'(t)$, $B : E_2 \to E_1$, $(By)(t) = \int\limits_0^t y(s) ds$. Довести, що $AB = I_{E_2}$, $BA = I_{E_1}$.

ЗАНЯТТЯ 15
КОНТРОЛЬНА РОБОТА 2

Тематика задач

1. Дослідити послідовність на збіжність (простори $C([a,b])$; $L_p(X, \lambda)$, $1 \le p < \infty$; l_p, $1 \le p \le \infty$).

2. Довести, що функціонал є лінійним і неперервним та знайти його норму.

3. Довести, що оператор є лінійним і неперервним та знайти його норму.

ЗАНЯТТЯ 16
ОБОРОТНІСТЬ ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ОПЕРАТОРІВ

Контрольні запитання

1. Означення неперервного оберненого оператора до заданого ЛНО.
2. Теорема про обернений до оператора, близького до одиничного.
3. Теорема Банаха про обернений оператор.

A16

1. З'ясувати, чи є неперервно оборотним оператор $A \in \mathcal{L}(E)$, якщо

$$E = l_1, \quad Ax = (x_1, x_2 - 2x_3, x_3, x_4, x_5, \dots).$$

2. Нехай E – банахів простір, $A \in \mathcal{L}(E)$. Довести, що оператор A неперервно оборотний тоді і тільки тоді, коли неперервно оборотний оператор A^2.

3. Нехай $E_1 = \{x \in C^{(1)}([0,1]) \ \mid x(0) = 0\}$, $\|x\|_1 = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |x'(t)|$, $E_2 = C([0,1])$, $A : E_1 \to E_2$, $(Ax)(t) = x'(t) - x(t)$.

1) Довести, що оператор A є лінійним і неперервним.

2) Довести, що оператор A неперервно оборотний і знайти A^{-1}.

4. Нехай $\big(\alpha_{jk}\big)_{j,k=1}^{\infty}$ – така числова матриця, що $\sup\limits_{j\geq 1} \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_{jk}| < 1$. Довести, що система

$$x_j = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{jk} x_k + y_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

має для кожного $y = (y_1, y_2, \dots) \in l_\infty$ єдиний роз'вязок $x = (x_1, x_2, \dots)$ у просторі l_∞, причому

$$\exists C > 0 \ \forall y \in l_\infty : \ \|x\|_\infty \leq C\|y\|_\infty.$$

Д1. Зафіксуємо дійсні лінійні простори $C([0,1])$, $C^{(1)}([0,1])$. Нехай $E_1 = C^{(1)}([0,1])$, $\|x\|_1 = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |x'(t)|$, $E_2 = C([0,1]) \times \mathbb{R}$, $\|(x,\lambda)\|_2 = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| + |\lambda|$. Тоді $(E_k, \|\cdot\|_k)$, $k = 1, 2,$ – банахові простори. Розглянемо оператор $A : E_1 \to E_2$, $Ax = (x' - x,\, x(0))$. Довести, що:

1) $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$;

2) оператор A неперервно оборотний;

3) існує така стала $C > 0$, що для довільних $y \in C([0,1])$, $x_0 \in \mathbb{R}$ для розв'язку x задачі Коші

$$\begin{cases} x'(t) - x(t) = y(t), \ t \in [0,1], \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

справджується оцінка

$$\max_{t\in[0,1]}|x(t)| + \max_{t\in[0,1]}|x'(t)| \le C(\max_{t\in[0,1]}|y(t)| + |x_0|).$$

B16

1. Нехай $A \in \mathcal{L}(C([0,1]))$, $(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$. Довести, що:
1)$Ker\, A = \{\bar{0}\}$;
2) $R(A) \neq C([0,1])$ (тому оператор A не є неперервно оборотним).

2. З'ясувати, чи є неперервно оборотним оператор $A \in \mathcal{L}(E)$, якщо:

$$1)\ E = l_2, \quad Ax = (x_1 + x_2, x_2, x_3, x_4, \dots);$$
$$2)\ E = l_2, \quad Ax = (0, x_1, x_2, x_3, \dots);$$
$$3)\ E = C([-1,1]), \quad Ax(t) = tx(t).$$

3. Нехай A, B – такі оператори з $\mathcal{L}(E)$, що $AB = I$. Довести:
1) якщо $dim(E) < \infty$, то існує $A^{-1} = B$;
2) якщо $dim(E) = \infty$, то оператор A^{-1} не обов'язково існує.

Література

[1] Завдання до практичних занять з теорії міри та інтеграла для студентів спеціальностей "математика" і "статистика" механіко–математичного факультету (електронне видання). Укладачі: О. Ю. Константинов, О. Г. Кукуш, О. О. Курченко, О. Н. Нестеренко, Т. О. Петрова, В. М. Радченко, А. В. Чайковський. 2017. – 90 с.

[2] Навчальні завдання до практичних занять з функціонального аналізу (електронне видання). Укладачі: О. Ю. Константінов, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський. 2014. – 41 с.

[3] Збірник задач з функціонального аналізу: навч. посіб. Видання друге, виправлене і доповнене (електронне видання). Укладачі: В. Б. Брайман, О. Ю. Константінов, О. Г. Кукуш, Ю. С. Мішура, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський. 2023. - 313 с.

[4] Dorogovtsev A. Ya. Elements of the General Theory of Measure and Integral, Vyshcha Shkola,. Kyiv, 1989. - 152 p.

[5] Радченко В. М. Теорія міри та інтеграла. Навчальний посібник (електронне видання). 2018. — 110 с.

[6] Березанський Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель В. Г. Функціональний аналіз. – Львів, Видавець І. Є. Чижиков, 2014. – 560 с.

[7] Константінов О. Ю. Функціональний аналіз, Навчальний посібник (електронне видання). 2021. - 113 с.